

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

Analýza zbytkových napětí v plastech

Analysis of residual Stresses in Plastic Materials

Student:

Zbyněk Paška

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. František Fojtík, Ph.D.

Ostrava 2013

Zadání bakalářské práce

Student: **Zbyněk Paška**
Studijní program: **B2341 Strojírenství**
Studijní obor: **3901R003 Aplikovaná mechanika**
Téma: **Analýza zbytkových napětí v plastech**
Analysis of Residual Stresses in Plastic Materials

Zásady pro vypracování:

- 1: Rozbor metod vhodných pro analýzu zbytkových napětí u plastů.
- 2: Stanovení konstanty optické citlivosti materiálu CT200.
- 3: Analýza zbytkových napětí v zadané součásti pomocí optických metod.
- 4: Posouzení získaných výsledků.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] MACURA, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě. VŠB-TU Ostrava 2001, ISBN 80-7078-934-4.
- [2] MACURA, P.: Sbírka úloh z experimentální pružnosti. VŠB-TU Ostrava, 2008, ISBN 978-80-248-1823-8.
- [3] TREBUŇA, F.; ŠIMČÁK, F.: Príručka experimentálnej mechaniky, Edícia odbornej a vedckej literatúry, Technická univerzita v Košiciach, Košice, 2007, Slovensko, ISBN 80-8073-148-9.
- [4] TREBUŇA, F.; ŠIMČÁK, F.: Princípy, postupy, prístroje v metode photostress, Edícia odbornej a vedckej literatúry, Technická univerzita v Košiciach, 2006, Slovensko, ISBN 80-8073-670-7.
- [5] MILBAUER, M.: Fotoelasticimetrie a její použití v praxi, SNTL, Praha, 1953.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. František Fojtík, Ph.D.**

Datum zadání: 14.12.2012

Datum odevzdání: 20.05.2013



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 20.5. 2013



.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 - školní dílo.
- беру на ве́домі́, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užit (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užit dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užit své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněná v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на ве́домі́, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 20. 5. 2013



podpis

Jméno a příjmení autora práce:

Zbyněk Paška

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Karolinka

Úzká 585, 756 05

okr. Vsetín

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

PAŠKA, Z. *Analýza zbytkových napětí v plastech: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2013, 60 s. Vedoucí práce: Fojtík, F.

V této bakalářské práci pojednávám o možnostech měření zbytkových napětí v plastech. Hlavní pozornost je věnována problematice optického zkoumání napjatosti v zadané součásti. Cílem je určit rozložení napětí po celé ploše modelu včetně směrů hlavních napětí. Bakalářská práce je vypracována v souladu s americkou normou ASTM D4093. V úvodu experimentálního řešení je stanovena konstanta optické citlivosti použitého materiálu. Je provedena analýza zatíženého a trvale deformovaného vzorku. Výsledky získané z fotoelasticimetrického zkoumání u zatíženého vzorku jsou porovnány s výsledky získanými z analytického a MKP řešení. Numerické řešení MKP je provedeno v programu Patran.

ANNOTATION OF BACHEOR THESIS

PAŠKA, Z. *Analysis of Residual Stresses in Plastic Materials: Bachelor Thesis*. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 2013, 60 p. Thesis head: Fojtík, F.

In this bachelor thesis I deal with the possibilities of measurement of residual stresses contained in plastic materials. Main attention is paid to the investigation of stress assigned in specimen by optical methods. The purpose of this thesis is to determine the layout of stresses on overall area including the direction of principal stresses. Bachelor thesis is worked up on the basis of American standard ASTM D4093. In introduction of experimental analysis there is determined the constant which is known as material fringe value. An analysis of the loaded and permanently deformed specimen has been carried out. The results obtained from photoelasticity measurement in case of loaded specimen are compared with results gained from analytical and FEM analysis. Numerical solving is performed in Patran software.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČENÍ.....	8
ÚVOD	10
1 ROZBOR EXPERIMENTÁLNÍCH METOD PRO ANALÝZU ZBYTKOVÝCH NAPĚTÍ	11
1.1 MECHANICKÉ METODY	12
1.1.1 Odvrtávací metody.....	12
1.1.2 Metody rozřezávací.....	12
1.1.3 Obrysová metoda (angl. Contour Method)	12
1.1.4 Metody odstranění vrstev	13
1.1.5 Metoda drážky	13
1.2 FYZIKÁLNÍ METODY	14
1.2.1 Ultrazvuková metoda.....	14
1.2.2 DSPI Interferometr	14
1.2.3 Metoda PRISM	16
1.2.4 Fotoelasticimetrické metody.....	17
2 FOTOELASTICIMETRIE.....	18
2.1 SVĚTLO	18
2.2 POLARIZACE	18
2.3 ZÁKLADNÍ VZTAHY	19
2.4 POLARISKOP PRO PŘÍMKOVOU POLARIZACI	20
2.5 SESTAVA POLARISKOPU PRO KRUHOVOU POLARIZACI	21
2.6 KONSTANTA OPTICKÉ CITLIVOSTI	22
2.6.1 Stanovení konstanty optické citlivosti tahovou epruvetou	22
2.6.2 Stanovení konstanty optické citlivosti ohybem nosníku	22
2.6.3 Stanovení konstanty optické citlivosti pomocí stlačovaného kruhového disku	23
2.7 HODNOTA ŘÁDU	23
2.8 SEPARAČNÍ TECHNIKY	23
2.8.1 Separace pomocí integrace rovnic rovnováhy	24
3 VYŠETŘOVÁNÍ ZATÍŽENÉHO NOSNÍKU	26
3.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ ZATÍŽENÉHO NOSNÍKU	26
3.1.1 Analytický výpočet	27
3.2 ŘEŠENÍ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ	30
3.2.1 Okrajové podmínky a použitý materiál	30
3.3 EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA ZATÍŽENÉHO NOSNÍKU	33
3.3.1 Konstanta optické citlivosti	34
3.3.2 Zjištění průběhů izoklinných křivek.....	35
3.3.3 Zjištění průběhu izochromatických křivek	36

3.3.4	<i>Konstrukce izostatických křivek</i>	38
3.3.5	<i>Separace hlavních napětí metodou rozdílu smykových napětí</i>	38
3.4	SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ JEDNOTLIVÝCH PŘÍSTUPŮ	42
3.4.1	<i>Velikosti složek napětí</i>	42
3.4.2	<i>Orientace hlavních napětí</i>	43
4	VYŠETŘENÍ NAPJATOSTI V TRVALE DEFORMOVANÉM MODELU	44
4.1	ANALÝZA TRANSMISNÍ FOTOELASTICIMETRIÍ	45
4.1.1	<i>Vyšetření izochromatických čar</i>	45
4.1.2	<i>Zjištění izoklinných křivek</i>	46
4.1.3	<i>Izostatické křivky</i>	47
4.1.4	<i>Vyhodnocení metodou rozdílu smykových napětí</i>	48
4.1.5	<i>Napětí a řády izochromat</i>	51
4.1.6	<i>Interpretace výsledků</i>	51
5	ZÁVĚR	53
6	POUŽITÁ LITERATURA	56
7	SEZNAM PŘÍLOH	60

SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČENÍ

A_y, B_y	Reakce působící ve směru osy y	[N]
B	Tloušťka nosníku	[mm]
$B(\eta)$	Velikost tloušťky modelu ve vzdálenosti η od hlavní centrální osy z	[mm]
$B(y)$	Velikost tloušťky modelu ve vzdálenosti y od hlavní centrální osy z	[mm]
C	Fotoelasticimetrická konstanta	[mm ² /N]
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
F	Síla	[N]
H, h	Výška nosníku	[mm]
I	Intenzita světla	[W/m ²]
J_{yz}	Deviační moment průřezu k osám yz	[mm ⁴]
J_y	Osový moment setrvačnosti plochy k ose y	[mm ⁴]
J_z	Osový moment setrvačnosti plochy k ose z	[mm ⁴]
L	Délka nosníku	[mm]
M_y	Ohybový moment k ose y	[N·mm]
M_{omax}	Maximální ohybový moment	[N·mm]
$Q(x)$	Posouvající síla	[N]
R_x	Reakce působící ve směru osy x	[N]
$S_z(y)$	Statický moment plochy k hlavní ose z , ohraničené přímkou ve vzdálenosti y od osy z a obrysem příčného průřezu	[mm ³]
W_o	Modul průřezu v ohybu	[mm ³]
a	Vzdálenost působíště síly od podpory	[mm]
b	Šířka tahové epruvety	[mm]
c	Rychlost světla ve vakuu	[m/s]
d	Průměr kruhového disku	[mm]
e_1	Vzdálenost krajního vlákna od osy z	[mm]
i	Pořadové číslo	[—]
k	Deformačně - optický koeficient	[—]
k^c	Konstanta optické citlivosti modelové hmoty	[N/mm]
l	Vzdálenost podpor	[mm]
m	Relativní dvojlom, řád izochromatické čáry	[—]
n	Index lomu.	[—]
t	Skutečná tloušťka modelu	[mm]
t_o, t_1, t_2	Optická tloušťka modelu, délka skutečné dráhy světla	[mm]
Δx	Velikost kroku ve směru osy x	[mm]
Δy	Velikost kroku ve směru osy y	[mm]
$\Delta \tau_{xy}$	Rozdíl smykového napětí	[MPa]

α	Úhel natočení polarizačních rovin polarizátorů	[°]
δ	Rozdíl optických tloušťek, dráhový posun	[mm]
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Hlavní poměrné deformace	[—]
λ	Vlnová délka použitého světla	[mm]
μ	Poissonovo číslo	[—]
π	Ludolfovo číslo	[—]
σ	Normálové napětí	[MPa]
σ_o	Ohybové napětí	[MPa]
σ_{red}	Redukované napětí	[MPa]
σ_x, σ_y	Normálové napětí ve směru osy x a osy y	[MPa]
σ_1, σ_2	Hlavní napětí	[MPa]
$(\sigma_1 - \sigma_2)$	Rozdíl napětí odpovídající řádu izochromatické čáry	[MPa]
τ	Smykové napětí	[MPa]
τ_{max}	Maximální smykové napětí	[MPa]
$\tau_{yx}(y)$	Smykové napětí v rovině kolmé na osu y , působící ve směru osy x	[MPa]
φ	Fázový rozdíl, fázový posun	[rad]
φ_1	Úhel udávající směr hlavních napětí vzhledem k rovinám s napětovým stavem σ_x, σ_y a τ_{yx} (rovinná napjatost)	[°]
ZN	Zatížený nosník	
TDN	Trvale deformovaný nosník	
HMH	Teorie pevnosti (Huber-Mises-Hencky)	
MKP	Metoda konečných prvků	

ÚVOD

Cílem bakalářské práce je vyhodnotit úroveň zbytkových napětí v průhledném resp. průsvitném plastovém modelu. Za tímto účelem využíváme fotoelasticimetrických metod, konkrétně reflexní a transmisní. Mezi velkou výhodou fotoelasticimetrie patří schopnost podat celkovou představu o rozložení napětíových polí v součásti nebo v celé konstrukci. Metoda se využívá k detekci míst s největším gradientem napětí, kde později umístíme např. odporové tenzometry.

V práci uvádím přehled mechanických a fyzikálních experimentálních metod, které mohou být využity ke zjištění úrovně zbytkové napjatosti v plastech. Kompletní přehled a rozbor nelze vzhledem k omezenému rozsahu práce uvést. Hlavním zdrojem informací jsou publikované články v odborných časopisech, zachycující aktuální stav zkoumané problematiky.

Abychom ověřili použitou „dvojlomnou“ metodu a separační postup k určení jednotlivých hlavních napětí, předřadili jsme zde kapitolu pojednávající o průhledném trámku zatíženého tříbodovým ohybem. Porovnáme výsledky z řešení analytického, numerického a experimentálního.

U analytického řešení se součást nahradí matematickým modelem, který zjednodušuje tvar součásti. Konstitutivní vztahy (v klasické pružnosti obecný Hookeův zákon) doplňují rovnice rovnováhy a rovnice geometrické. Numerické řešení je založeno na diskretizaci součásti. Řešená součást se rozloží na velmi malé podoblasti (elementy) vzájemně propojenými v uzlech. Elementy mají, konečný rozměr nikoli infinitezimální. Hledáme primární veličiny - většinou jde o hodnoty posunutí v uzlech. Jakákoliv hodnota posunutí mimo uzlové body je určena aproximativně na základě předem volených báзовých funkcí. Počet stupňů volnosti diskretizované součásti souvisí přímo s množstvím uzlů. Konečnoprvkové řešení je provedeno pomocí programu Patran od společnosti MSC Software.

Z výsledků získaných podle všech třech způsobů byla patrná jistá podobnost. Tím jsme ověřili oprávněnost použití zvolené experimentální metody k analýze trvale deformovaného nosníku.

1 ROZBOR EXPERIMENTÁLNÍCH METOD PRO ANALÝZU ZBYTKOVÝCH NAPĚTÍ

Experimentální metody se dělí do následujících skupin [1]:

- elektrické metody (odporová tenzometrie),
- křehké laky,
- optické metody,
- rengenografie,
- ultrazvukové metody,
- termální emise,
- hybridní metody.

Další rozdělení metod vhodných k měření deformací a zbytkových napětí nalezneme v literatuře [2]. Podle tohoto zdroje rozeznáváme metody:

- destruktivní (relaxační metody),
- polodestruktivní (semidestruktivní),
- nedestruktivní.

Lze zde najít také přiřazení jednotlivých technik do níže uvedených kategorií:

- mechanické metody (metody dělící, odvrtávací,...),
- fyzikální metody (metody magnetické, difrakční, ultrazvukové,...),
- chemické metody.

Zmíněné skupiny zahrnují více jednotlivých metod. Příkladem jsou optické metody, mezi které zahrnujeme problematiku fotoelasticimetrie, holografie, moiré, optických interferometrů, ESPI, DICM a další [1].

Úkolem kapitoly je poskytnout základní informace o metodách vhodných k měření zbytkové napjatosti v plastových součástech.

1.1 MECHANICKÉ METODY

1.1.1 Odvrtávací metody

Jsou jedny z nejrozšířenějších metod. Jejich výhoda spočívá v rychlosti, dostupnosti a aplikovatelnosti na velké spektrum zkoušených materiálů. Výhody jsou částečně kompenzovány složitější interpretací získaných dat. Metodu řadíme do skupiny polodestruktivních metod. Vyhodnocujeme tzv. makroskopická napětí [3].

Pokud nejsou zbytková napětí rozložena rovnoměrně po hloubce, používáme postup měření v malých (inkrementálních) přírůstcích vrtané díry. S výhodou se používá pneumaticky poháněný vrtací nástroj, který dosahuje až 200 000 ot/min. Tím nedochází ke vzniku přídavných zbytkových napětí vlivem vrtání. Uvolněné deformace zachycujeme aplikovanou tenzometrickou růžicí, nebo pomocí optických metod, které poskytují informace o napjatosti v celém poli okolo vrtu [3].

Do skupiny odvrtávacích metod můžeme zařadit [3]:

- metodu vrtání kruhové díry (angl. hole-drilling method),
- metodu vrtání mezikruhové drážky (angl. ring-core method) [4]
- metodu vrtání hluboké díry (angl. deep hole method) [5].

1.1.2 Metody rozřezávací

Jsme schopni vyhodnotit pouze makroskopická zbytková napětí. Metoda je vhodná pro součásti, u nichž předpokládáme rozložení zbytkových napětí v jednom směru. Platí-li Hookeův zákon a známe-li velikost deformací před a po provedení rozřezání, pak určíme velikosti uvolněných zbytkových napětí. Jedná se o destruktivní metodu analýzy zbytkové napjatosti [6].

1.1.3 Obrysová metoda (angl. Contour Method)

Obrysová metoda je poměrně mladá a její počátky sahají přibližně do roku 2000. Použití této techniky vyžaduje čtyři kroky, které jsou následující [3]:

- rozřezání vzorku — nejlépe metodou elektroerozivního řezání drátem,
- měření obrysu — pomocí souřadnicových měřících strojů,
- redukce (přepočet) údajů — zprůměrování hodnot na zrcadlově si odpovídajících bodech po obou stranách řezů,
- analýza napětí — prostřednictvím MKP, kdy zadáváme již „vyhlazená“ data.

Zbytková napětí určujeme ze změřených posuvů. U víceosé obrysové metody nejsou zbytková napětí úměrná deformacím ale tzv. inherentním deformacím (nazývány také „eigenstrain“). Úkolem je tedy nejprve stanovit tyto inherentní deformace [3].

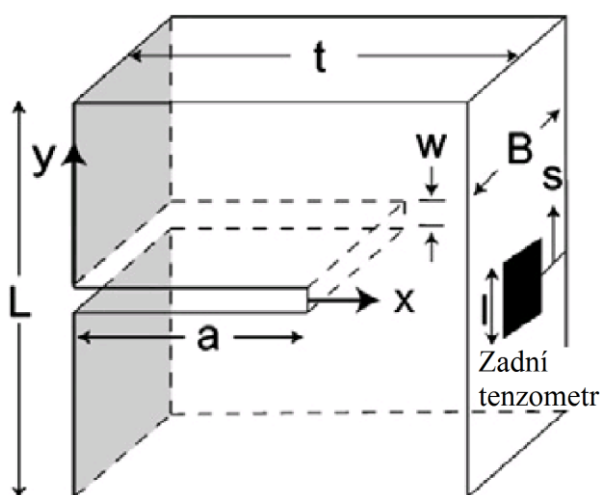
Velkou část pozornosti je nutno soustředit na správné a pevné upnutí vzorku před zahájením řezání. Upnutí musí minimalizovat možnost deformace vzorku během řezání vlivem uvolněných zbytkových napětí [7].

1.1.4 Metody odstranění vrstev

Zevšeobecnění tzv. Stoneyho metod. V literatuře jsou uváděny také jako metody Sachsovy [8]. K určení deformací slouží tenzometry, které jsou připevněny na protilehlé straně vzhledem k místu odebírání materiálu. Nejčastěji se používají u tlustých desek a válcových vzorků. Zkoumat můžeme velké spektrum konstrukčních materiálů [3].

1.1.5 Metoda drážky

Je zde patrná podobnost s metodou vrtání otvoru. Vyšetřování napjatosti probíhá za pomoci tenzometrického měření. Hloubka drážky narůstá v inkrementálních přírůstcích. Velikost napjatosti lze stanovit jak na povrchu součásti, tak také ve vnitřních vrstvách, použijeme-li dva tenzometry umístěné na přední a zadní části vzorku. Nevýhodou je skutečnost, že lze detekovat zbytková napětí pouze ve směru kolmém k drážce [3]. Metoda je aplikovatelná na více technických materiálů včetně laminátových kompozitů [9].



obr. 1 Metoda drážky (převzato z [9]).

1.2 FYZIKÁLNÍ METODY

Pro vyšetřování zbytkových napětí existuje více nedestruktivních metod. Difrakční metody, které uvedu níže nelze použít u materiálů amorfních, tyto metody jsou:

- rentgenová difrakce [8] — vhodné jsou kovy nebo některé keramické materiály,
- neutronová difrakce — proniká do větší hloubky ve srovnání s RTG difrakcí.

1.2.1 Ultrazvuková metoda

Princip spočívá na tzv. akusto-elastickém efektu. Vlivem výskytu napětí nebo zbytkových napětí ve zkoušené součásti dochází ke změnám rychlostí šíření zvukových vln, které zaznamenáváme. K detekci napětí jsou používány podélné, příčné nebo tzv. Rayleighovy vlny. Můžeme vyšetřovat poměrně tlusté součásti vyrobené z různých materiálů [10]. Abychom byli schopni určit velikosti zbytkových napětí, musíme nejprve stanovit tzv. akusto-elastické konstanty [11].

Na obr. 2 jsou ultrazvukové přístroje, pomocí kterých můžeme podle [12] měřit např. modul pružnosti v tahu/smyku, velikost Poissonova čísla, dobu šíření ultrazvukových vln materiálem, strukturu a několik dalších vlastností.



obr. 2 Ultrazvukové přístroje od firmy Olympus a různé typy snímačů od téže firmy (převzato z [12]).

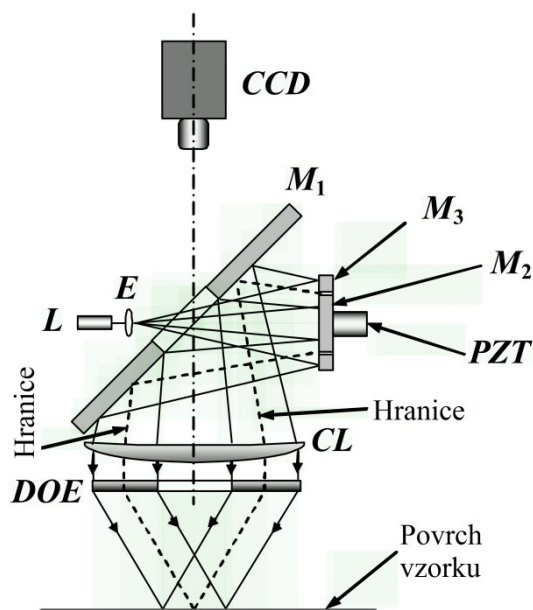
V literatuře [11] se uvádí tři typy vzorků potřebné k úspěšnému stanovení zbytkové napjatosti:

- vzorek pro tahovou zkoušku — stanovení akusto-elastických koeficientů,
- vzorek ke stanovení hloubky průniku ultrazvukových vln,
- vzorek pro vyšetřování zbytkových napětí.

1.2.2 DSPI Interferometr

DSPI (Double illumination digital Speckle Pattern Interferometry) je metoda hojně využívaná k měření posunutí a deformačních polí v rovině součásti. Abychom získali

kompletní obraz o posunutí v rovině součásti, jsou nutné dvě sestavy kolmého dvojitého osvětlení. Měří se tedy ve dvou kolmých směrech $\backslash x \backslash$, $\backslash y \backslash$, ze kterých pak lze vypočítat hodnoty posunutí a deformací. Obvykle je nutné provést měření samostatně a až poté kombinovaně. To vede ke zkomplikování celého měření a omezení pouze na statické úlohy. Ve strojírenské praxi stačí k určení deformací v bodě měřit hodnoty posunutí v radiálním směru v polárních souřadnicích. V tomto případě můžeme použít metodu jednoho osvětlení součásti [13].



obr. 3 Radiální DSPI interferometr (převzato z [13]). L - Laser;
E - Rozptylka; M1, M2, M3 - Rovinná zrcadla; PZT - Piezo posunovač;
CL - Kolimační čočka;
DOE - Difrakční optický objekt;
CCD - Kamera



obr. 4 Sestava pro měření zbytkových napětí metodou DSPI (řevzato z [13]).

Uprostřed je základna, kterou umístíme na zkoumanou konstrukci a na níž upínáme interferometr (vpravo) a odvrtávací zařízení (vlevo).

Funkci interferometru kombinujeme s odvrtáváním slepé díry. Sestava pro měření se skládá ze tří modulů vyobrazených na obr. 4. Nejdříve je pořízen referenční obraz zjevů pomocí interferometru. Poté je interferometr nahrazen sestavou pro vyvrtávání a je vyvrtána díra (\varnothing 1,6 až 1,8 mm o přibližně stejné hloubce). Odvrtáním dojde k uvolnění zbytkových napětí a k vytvoření deformačního pole okolo díry. Následně nasadíme interferometr zpátky na základnu a pořídíme nový obraz fázového pole. Na základě těchto dvou zjevů určíme hodnotu fázového rozdílu. Díru vrtáme buď najednou, nebo po přírůstcích [13].

1.2.3 Metoda PRISM

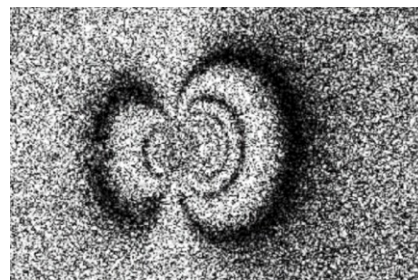
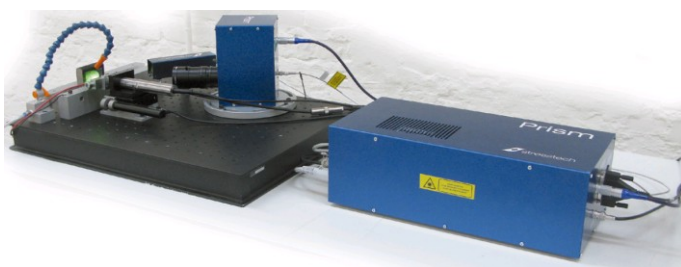
Semidestruktivní metoda, která využívá kombinaci odvrtávací metody a grafického zobrazení přes připojený počítač. Systém snímá laserové obrázky součásti před vrtáním a poté v průběhu vrtání, které může být rozděleno do několika inkrementálních částí. Je zde využita metodika ESPI (z angl. Speckle Pattern Interferometry System). Můžeme ji využít u plastů a výrobků z titanu. Mezi hlavní výhody můžeme zařadit rychlost, vysokou rozlišitelnost, vhodnost softwaru pro rozhraní Windows, přesnost a přizpůsobivost pro řešení konkrétního problému [14].

Postup měření [14]:

- stanoví se místo na součásti k provedení měření,
- systém automaticky rozezná kontakt se vzorkem a začátkem vrtání,
- uživatel nastaví požadovanou hloubku vrtu,
- po každém inkrementálním přírůstku hloubky je automaticky proveden záznam laserového obrazu. Další obraz je proveden za účelem stanovení měřítka a pozice díry.

Výsledky, vyhodnocení [14]:

- napětí jsou počítaná v souřadném systému vzorku,
- získáme hodnoty horizontálních, vertikálních a smykových napětí,
- zjistíme směry hlavních napětí,
- metoda nepředpokládá homogenní napjatost. Pracuje s inkrementálními přírůstky hloubky a je schopna vyhodnotit i nehomogenní napjatost.



obr. 5 Sestava pro měření zbytkového napětí metodou PRISM a ukázka obrazce okolo vyvrtané díry (převzato z [14]).

1.2.4 Fotoelasticimetrické metody

Některé průhledné materiály se stávají vlivem zatížení nebo vlivem výskytu zbytkových napětí opticky anizotropní, mluvíme pak o tzv. dočasném dvojlomu. Můžeme dále pozorovat jistou podobnost s krystalickými látkami. Prochází-li polarizované světlo takovýmto průhledným materiálem, rozdělí se do dvou paprsků kmitajících ve směrech hlavních napětí a šířící se různou rychlostí. Rozdílná rychlost způsobí vznik dráhového posunu δ [15].

Rozeznáváme následující tři skupiny fotoelasticimetrických (dvojlomných) metod [16]:

- rovinná fotoelasticimetrie,
- reflexní fotoelasticimetrie,
- prostorová fotoelasticimetrie.

Velmi využívaná je metoda odrazové fotoelasticimetrie (Photostress). Na součást se umístí opticky aktivní povrstvení, které je poté osvětleno polarizovaným světlem. Analýzu provádíme na skutečných součástech při statickém i dynamickém zatížení. Metoda umožňuje také vyhodnocení zbytkových napětí. V současné době je možné vyhodnotit velikosti napětí za pomoci elektronického kompenzátoru a softwaru PSCalc [17].



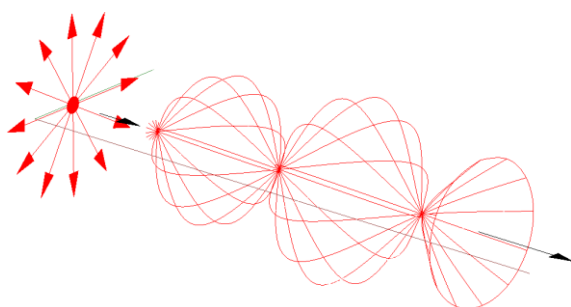
obr. 6 Ukázka aplikace opticky aktivního povrstvení na součást (převzato z [17]).

pozn.: Fotoelasticimetrickým metodám věnujeme samostatnou kapitolu 2.

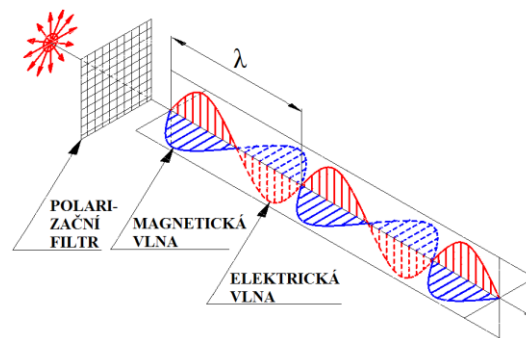
2 FOTOELASTICIMETRIE

2.1 SVĚTLO

Světlo je elektromagnetické vlnění, které se šíří přímočaře a kmitá ve všech rovinách obsahující směr šíření světla (obr. 7). Skládá se z elektrické a magnetické složky (viz obr. 8).



obr. 7 Nepolarizovaný světelný paprsek.

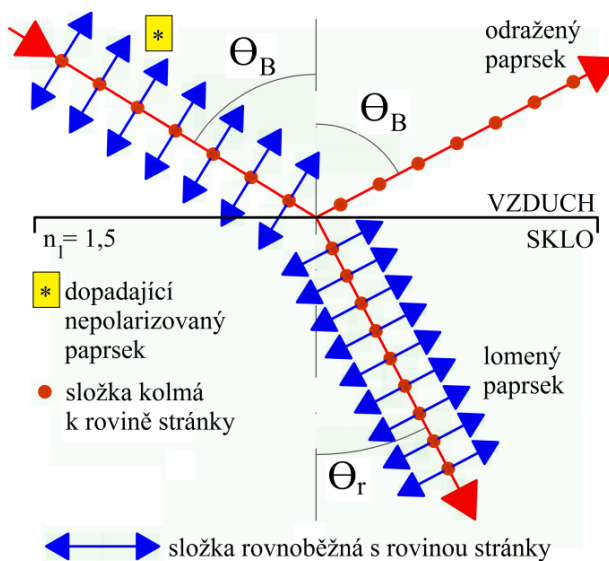


obr. 8 Polarizované světlo.

Součástí elektromagnetismu je optika zabývající se viditelným světlem v rozsahu vlnových délek 430 až 690 nm. Ve vakuu se všechny elektromagnetické vlny šíří stejnou rychlostí c [18].

2.2 POLARIZACE

Na obr. 9 vidíme polarizaci světla odrazem. K úplné polarizaci dojde, jestliže svírá dopadající paprsek se svislicí tzv. Brewsterův úhel Θ_B .



obr. 9 Polarizace světla odrazem [18].

Polarizované světlo lze získat v zásadě třemi způsoby [16]:

- polarizací odrazem,
- polarizací lomem,
- polarizací dvojlomem.

K usměrnění (polarizaci) světla využíváme ve fotoelasticimetrii polarizačních filtrů. Průchodem světelného paprsku polaroidem dojde k usměrnění kmitů světla do jedné roviny, kterou nazýváme rovinou kmitů. Rovina kmitů je kolmá k polarizační rovině polarizátoru [16].

2.3 ZÁKLADNÍ VZTAHY

Optická tloušťka je definovaná jako dráha, kterou světelný parsek ve vzorku urazí. Můžeme ji vyjádřit ze skutečné tloušťky a indexu lomu nezatíženého materiálu vzorku [19]:

$$t_o = t \cdot n. \quad (1)$$

Světlo se v zatíženém modelu štěpí na dvě světelné vlny, které kmitají ve směrech hlavních napětí a postupují modelem každá jinou rychlostí. Je tedy možno definovat dvě optické tloušťky [19]:

$$\begin{aligned} t_1 &= t(n + a\sigma_1 + b\sigma_2), \\ t_2 &= t(n + a\sigma_2 + b\sigma_1), \end{aligned} \quad (2)$$

kde a , b jsou tzv. elastické indexy lomu. Provedeme-li rozdíl těchto tloušťek, dostaneme vztah pro velikost dvojlomu [19]:

$$\delta = t_1 - t_2 = t(a - b)(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (3)$$

Ve zmíněné rovnici můžeme položit $C = (a - b)$. Veličinu C nazýváme fotoelasticimetrickou konstantou. Vztah (3) můžeme formálně napsat takto [19]:

$$\delta = t_1 - t_2 = t \cdot C(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (4)$$

Dráhový rozdíl lze v souladu s normou ASTM D4093 [20] vyjádřit:

$$\delta = (n_1 - n_2)t = k \cdot t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (5)$$

kde ε_1 , ε_2 značí hlavní poměrné deformace ve dvou kolmých směrech. Z rovnice vyjádříme deformačně-optický koeficient k :

$$k = \frac{(n_1 - n_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}. \quad (6)$$

Většinou pracujeme s hlavními napětími, proto vztah (4) upravíme na tvar:

$$\delta = (n_1 - n_2)t = t \cdot C(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (7)$$

Odtud vyjádříme fotoelasticimetrickou konstantu C — vztah (8). Konstanta bývá udávána v jednotkách (m^2/N), eventuálně v jednotkách Brewster ($10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$).

$$C = \frac{(n_1 - n_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (8)$$

Při fotoelasticimetrickém vyšetřování je úkolem stanovit směry hlavních poměrných deformací nebo napětí a velikost relativního dvojlomu [20].

Místa s konstantním dvojlomem se v bílém světle projevují stejně barevnými pruhy. Vzniklé barevné pruhy se nazývají izochromaty [21].

Fázový rozdíl můžeme chápat jako dráhový rozdíl vztažený na vlnovou délku světla λ . Vyjádříme jej podle [19] a [16] rovnicí:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \cdot C \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\lambda} \cdot t. \quad (9)$$

Jak uvádí [19], ve fotoelasticimetrii definujeme tzv. konstantu optické citlivosti k^c :

$$k^c = \frac{\lambda}{C}. \quad (10)$$

Na základě tohoto vztahu můžeme rovnici (9) upravit na tvar:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{k^c} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot t. \quad (11)$$

Vyjádříme-li dráhový posun jako násobek vlnové délky světla [16]:

$$\delta = m \cdot \lambda, \quad \text{kde } m \in (0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

můžeme rovnici (7), využijeme-li rovnici (10) a (12), vyjádřit tvarem:

$$m = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{t}{k^c} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (13)$$

Intenzitu světelného záření po průchodu přes polarizátor, model a analyzátor, lze po jednoduchých matematických úpravách napsat vztahem [16], [19]:

$$I = \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (14)$$

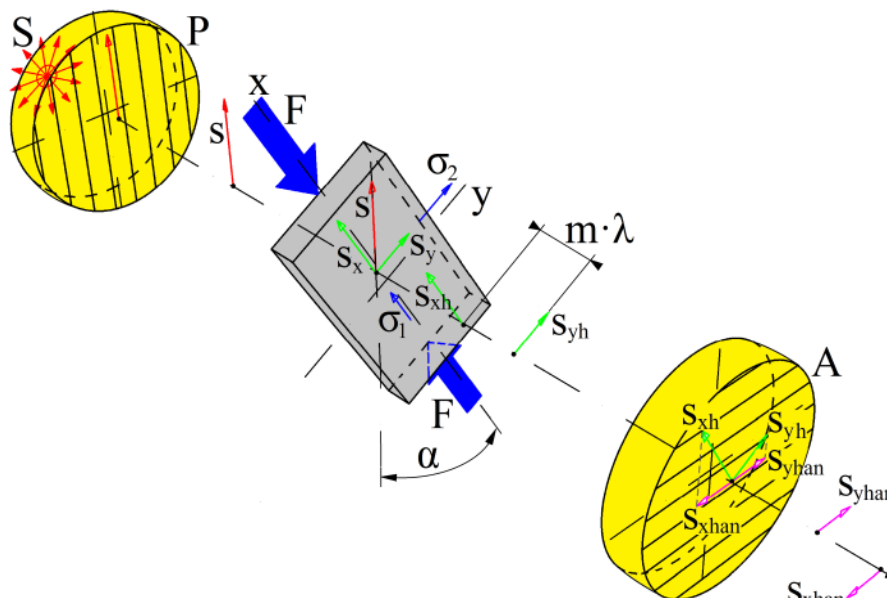
Podrobnější teorii a odvození vztahů pro různé uspořádání polarizačního aparátu jsou uvedeny v literatuře [22].

2.4 POLARISKOP PRO PŘÍMKOVOU POLARIZACI

Základní soustava pro přímkovou polarizaci je tvořena (viz obr. 10):

- zdrojem světla (S),
- polarizátorem (P),
- vyšetřovaným tělesem,
- analyzátozem (A).

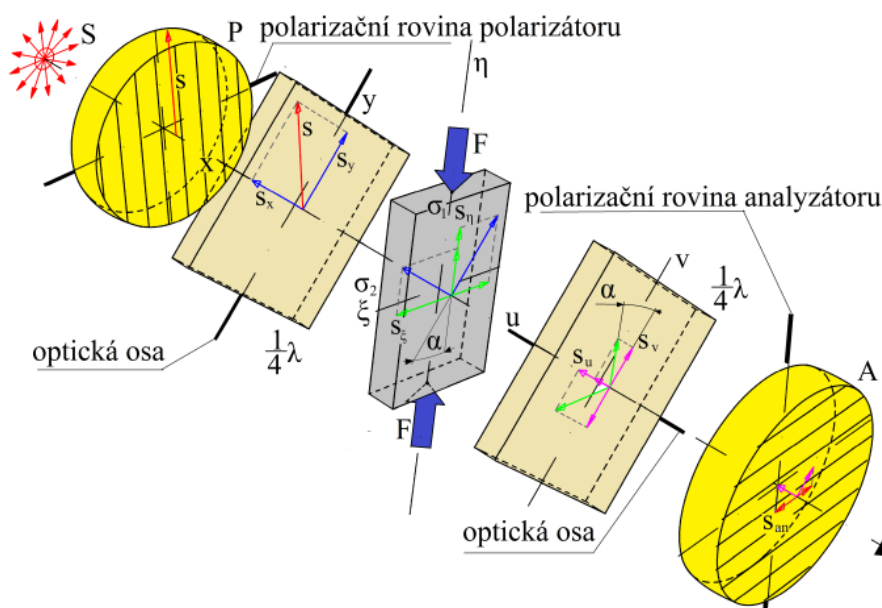
Zdrojem světla může být světlo bílé nebo monochromatické. V prvním případě jsou pozorované zjevy v zorném poli analyzátoru v duhových barvách, ve druhém případě se jeví jako černé čáry, plochy a body. Pozorovanými objekty jsou čáry izochromatické a izokliné, jejichž vznik nebo zánik závisí na uspořádání sestavy polariskopu pro měření, případně na druhu polarizovaného světla.



obr. 10 Sestava polariskopu vytvářející přímkově polarizované světlo [22].

2.5 SESTAVA POLARISKOPU PRO KRUHOVOU POLARIZACI

Mezi polarizátorem a modelem, a také mezi modelem a analyzátozem jsou umístěny čtvrtvlnové desky (viz obr. 11).



obr. 11 Sestava polariskopu vytvářející kruhově polarizované světlo [22].

Čtvrtvlnové desky jsou vyrobeny z dvojlomného materiálu. Jejich polarizační roviny jsou vzájemně kolmé a s polarizačními rovinami polarizátoru a analyzátoru svírají úhel 45° . Čtvrtvlnové desky rozkládají vektor světla na dvě kolmé složky s fázovým posuvem rovným $1/4$ vlnové délky použitého světla. Je tedy jasné, že každému monochromatickému světlu odpovídá jiná čtvrtvlnová deska v závislosti na jeho vlnové délce. V takto uspořádané sestavě polariskopu se v zorném poli analyzátoru neobjevují čáry izoklinné [16].

2.6 KONSTANTA OPTICKÉ CITLIVOSTI

Z rovnice (13) získáme hodnotu konstanty optické citlivosti:

$$k^c = \frac{t}{m} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (15)$$

Uurčíme-li v konkrétním bodě modelu známé tloušťky hodnotu rozdílu hlavních napětí a hodnotu relativního dvojlomu, určíme poté konstantu optické citlivosti [16].

2.6.1 Stanovení konstanty optické citlivosti tahovou epruvetou

Princip spočívá v měření velikosti sil, při kterých se v prizmatické části epruvety (viz obr. 12) objevují izochromatické křivky celých popřípadě polovičních řádu [16]. Hlavní napětí jsou:

$$\sigma_1 = \frac{F}{b \cdot t}, \quad \sigma_2 = 0. \quad (16)$$

S využitím vztahu (15) a po úpravě dostaneme pro konstantu optické citlivosti:

$$k^c = \frac{t}{m} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{t}{m} \left(\frac{F}{b \cdot t} - 0 \right) = \frac{F}{b \cdot m}. \quad (17)$$

2.6.2 Stanovení konstanty optické citlivosti ohybem nosníku

Ve zkušebním trámku (obr. 13) vyvodíme za pomoci zkušebního rámu tzv. čistý ohyb. Jak je uvedeno v [16] a [23], nabývají hlavních napětí velikosti:

$$\sigma_1 = \sigma_o = \frac{6 \cdot F \cdot a}{t \cdot h^2}, \quad \sigma_2 = 0. \quad (18)$$

S využitím vztahu (15) a po úpravě:

$$k^c = \frac{t}{m} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{t}{m} \left(\frac{6 \cdot F \cdot a}{t \cdot h^2} - 0 \right) = \frac{6 \cdot F \cdot a}{m \cdot h^2}. \quad (19)$$

2.6.3 Stanovení konstanty optické citlivosti pomocí stlačovaného kruhového disku

Pro případ stlačovaného disku (obr. 14) jsou známy vztahy (uvedeny v [16], [23]) pro velikosti hlavních napětí uprostřed disku:

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot t}, \quad \sigma_2 = -\frac{6 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot t}. \quad (20)$$

Opět vyjádříme konstantu optické citlivosti ze vztahu (15):

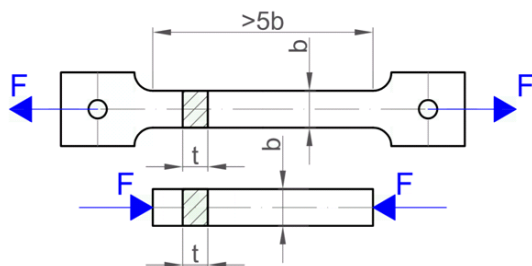
$$k^c = \frac{t}{m}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{t}{m} \left(\frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot t} + \frac{6 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot t} \right) = \frac{8 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot m}. \quad (21)$$

2.7 HODNOTA ŘÁDU

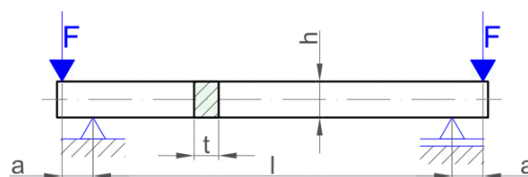
Izochromatické křivce odpovídá vždy velikost rozdílu hlavních napětí v závislosti na jejím řádu. Z rovnice (13) dostaneme po úpravě vztah:

$$m \cdot \frac{t}{k^c} = (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (22)$$

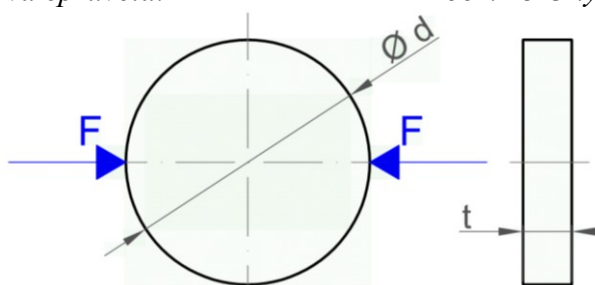
Hodnotu relativního dvojlomu m určíme z nákresu izochromatických čar. Tloušťka modelu je většinou známa a velikost konstanty optické citlivosti určíme pomocí metod uvedených výše.



obr. 12 Tahová epruveta.



obr. 13 Ohýbaný nosník.



obr. 14 Stlačovaný kruhový disk.

2.8 SEPARAČNÍ TECHNIKY

Úkolem práce je stanovit velikosti napětí po celé ploše zkoumaného modelu. Z fotoelasticimetrického vyšetření získáme pouze rozdíly hlavních napětí příslušející čáře izochromatické odpovídajícího řádu (viz rovnice (23)). Existuje více separačních technik,

které uvádím v tab. 1. Z uvedených metod sloužících k určení složek tenzoru napětí jsem využil metodu integrace rovnic rovnováhy vyjádřených v kartézských souřadnicích.

$$k^c = \frac{t}{m} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (23)$$

tab. 1 Separální techniky využívané ve fotoelasticimetrii (převzato z [24]).

Technika	Rok
Integrace rovnic rovnováhy	1931
Integrace Lamé - Maxwellových rovnic	1931
Metoda otvoru (angl. The hole method)	1932
Separace šikmým osvětlením	1943
Separace pomocí čar izopach	1955
Metoda povrstvení páskem (angl. Strip coating method)	1965
Řešení rovnic kompatibility	1966
Využití měření deformací tenzometrem	1986
Metoda drážky	1987
Kombinace s termoelasticitou	1996

2.8.1 Separace pomocí integrace rovnic rovnováhy

Neboli metoda rozdílů smykových napětí. Provádíme integraci rovnic rovnováhy elastického materiálu (24). Omezíme se na případ rovinné napjatosti a neuvažujeme vliv objemových sil. K určení složek napětí je nutno znát gradienty smykových napětí, které lze získat pomocí měření izoklinných čar, což je ale méně přesné než měření pořadí izochromat [24].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Integraci první rovnice z rovnic (24) vyjádříme následovně:

$$\sigma_{xj} = \sigma_{x0} - \int_0^j \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx. \quad (25)$$

Parciální derivaci vyskytující se ve vztahu (25) můžeme vyjádřit, známe-li smyková napětí ve dvou sousedních řezech okolo hlavního řezu [23]:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = tg\alpha \cong \frac{\tau_{xya} - \tau_{xyb}}{\Delta y}. \quad (26)$$

Na základě vyjádření (26) upravíme vztah (25) za pomoci numerické integrace do tvaru:

$$\sigma_{xj} = \sigma_{x0} \pm \sum_{i=1}^j \frac{\Delta \tau_{xyi}}{\Delta y} \Delta x. \quad (27)$$

Rovnice (27) umožňuje nalézt hodnoty separovaného napětí v bodech integrační mřížky (obr. 15). Změnu smykového napětí stanovíme z hodnot na horní a spodní linii okolo hlavního řezu [24]. Smykové napětí v hlavních a vedlejších řezech určíme podle vztahů [16]:

$$\tau_{ai} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{ai} \sin(2\alpha_{ai}), \quad (28)$$

$$\tau_{bi} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{bi} \sin(2\alpha_{bi}), \quad (29)$$

$$\tau_{xyi} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_i \sin(2\alpha_i). \quad (30)$$

Platí-li pro velikost kroku ve směru osy x a ve směru osy y vztah $\Delta x = \Delta y$, přechází rovnice (27) dále na formu [25]:

$$\sigma_{xj} = \sigma_{x0} \pm \sum_{i=1}^j \Delta \tau_{xyi}. \quad (31)$$

Druhá složka napětí je určena z Mohrovy kružnice a nabývá tvaru:

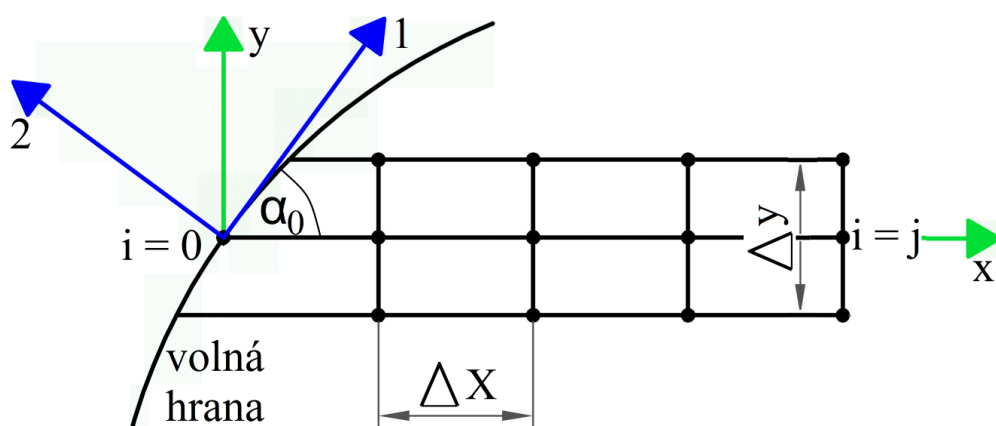
$$\sigma_{yj} = \sigma_{xj} \pm (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos(\alpha_i). \quad (32)$$

Nyní můžeme určit hlavní napětí z Mohrovy kružnice:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}. \quad (33)$$

Redukované napětí určíme podle hypotézy HMM pro rovinnou napjatost:

$$\sigma_{red}^{HMM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2}. \quad (34)$$



obr. 15 Ukázka mřížky používané u metody rozdílů smykových napětí.

3 VYŠETŘOVÁNÍ ZATÍŽENÉHO NOSNÍKU

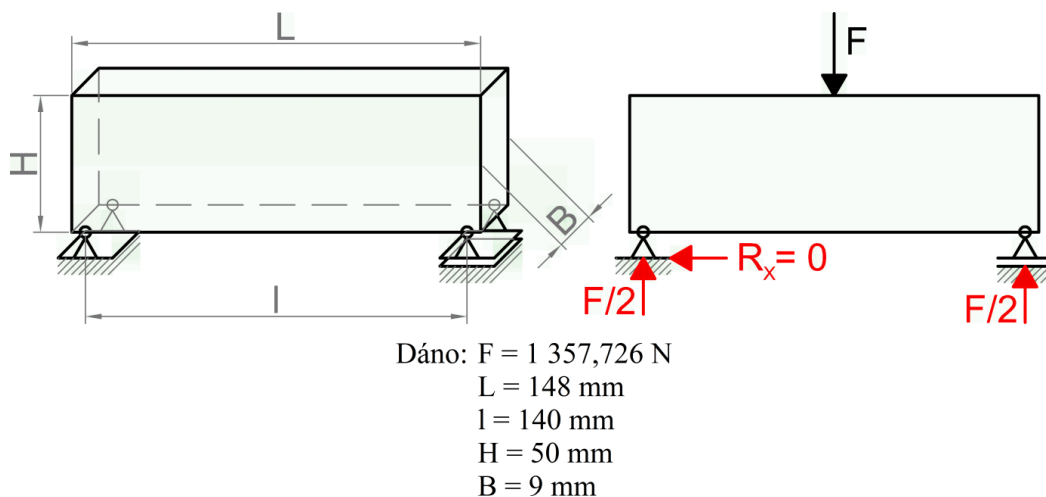
Experimentální vyšetřování zbytkové napjatosti je popsáno normou ASTM D4093. K ověření metodiky bude provedeno srovnání s řešením analytickým a numerickým. U všech typů analýz byl použit nosník s materiálovými parametry uvedenými v tab. 2. Rozměry a způsob zatížení trámku vidíme na obr. 16.

tab. 2 Materiál Araldite CT 200 [26]		
Typ materiálu	Modul pružnosti	Poissonovo číslo
Araldite CT 200	$E = 3\,124\text{ MPa}$	0,35

Cílem kapitoly bude posoudit přesnost experimentální metody za účelem jejího dalšího aplikování na trvale deformovaný nosník.

3.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ ZATÍŽENÉHO NOSNÍKU

Model je umístěn do zatěžovacího rámu a pomocí šroubového mechanismu je vyvozena síla, která jej namáhá v polovině jeho délky. Analyzovaná součást je uložena na dvou podporách, které při výpočtech nahrazujeme jednou podporou kloubovou pevnou a druhou kloubovou posuvnou (obr. 16). Namáhání, pak způsobuje ohybový moment a posouvající síla.



obr. 16 Nosník je uložen na dvou kloubových podporách, z nichž jedna je posuvná. Jde o úlohu staticky určitou.

Výpočet normálového napětí ve směru osy x provedeme pomocí vztahu (35), který vychází z podmínky momentové a silové rovnováhy [27]:

$$\sigma_x(y, z) = M_y \frac{J_{yz}y - J_y y}{J_{yz}^2 - J_y J_z}. \quad (35)$$

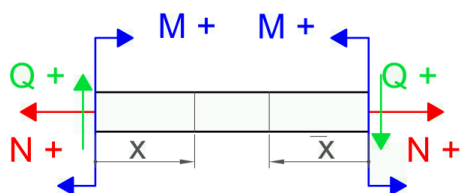
Jestliže je osa y a z hlavní, pak je deviační moment plochy $J_{yz} = 0$. Vztah (35) nabude nového tvaru:

$$\sigma_x(y, z) = M_y \frac{y}{J_z} \quad (36)$$

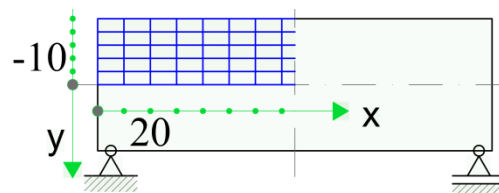
3.1.1 Analytický výpočet

Ukázkové řešení provedeme pro hodnoty souřadnic $y = -10$ mm a $x = 20$ mm (obr. 18). Dodržujeme znaménkovou konvenci z obr. 17. Velikost normálového napětí ve směru osy x podle (36) bude:

$$\sigma_x(-10) = M_y \frac{y}{J_z} = \frac{F}{2} x \cdot \frac{y}{\frac{1}{12} B H^3} = \frac{1357,726}{2} \cdot 20 \cdot \frac{(-10)}{\frac{1}{12} \cdot 9 \cdot 50^3} = -1,448 \text{ MPa}. \quad (37)$$



obr. 17 Znaménková konvence pro vnější silové účinky při vyšetřování zleva a zprava.



obr. 18 Analytické řešení provedeme pro body mřížky, využijeme symetrie úlohy.

Dále provedeme výpočet smykového napětí podle vztahu [27]:

$$\tau_{yx}(y) = \frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{1}{J_z B(y)} \int_y^{e1} B(\eta) \eta d\eta = \frac{Q(x) S_z(y)}{J_z B(y)}, \quad (38)$$

který nazýváme Žuravského větou. Pro obdélníkový průřez přechází tento vztah na tvar [27]:

$$\tau_{yx}(y) = \frac{Q(x) S_z(y)}{J_z B(y)} = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{B H} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{H} \right)^2 \right\}. \quad (39)$$

Rovnice vyjadřuje parabolickou funkci s proměnnou y . U řezu ve vzdálenosti $y = -10$ mm, nabývá smykové napětí hodnoty:

$$\tau_{yx}(-10) = \frac{3}{2} \frac{F}{B H} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{H} \right)^2 \right\} = \frac{3}{2} \frac{1357,726}{9 \cdot 50} \left\{ 1 - \left(\frac{-2 \cdot 10}{50} \right)^2 \right\} = 1,901 \text{ MPa}. \quad (40)$$

Z Mohrovy kružnice vyjádříme hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{yx})^2}. \quad (41)$$

Víme, že normálové napětí ve směru osy y je nulové. Pro hlavní napětí σ_1 bude:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + (\tau_{yx})^2} = \frac{-1,448}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1,448}{2} \right)^2 + (1,901)^2} = 1,310 \text{ MPa}. \quad (42)$$

Druhé hlavní napětí σ_2 nabude velikosti:

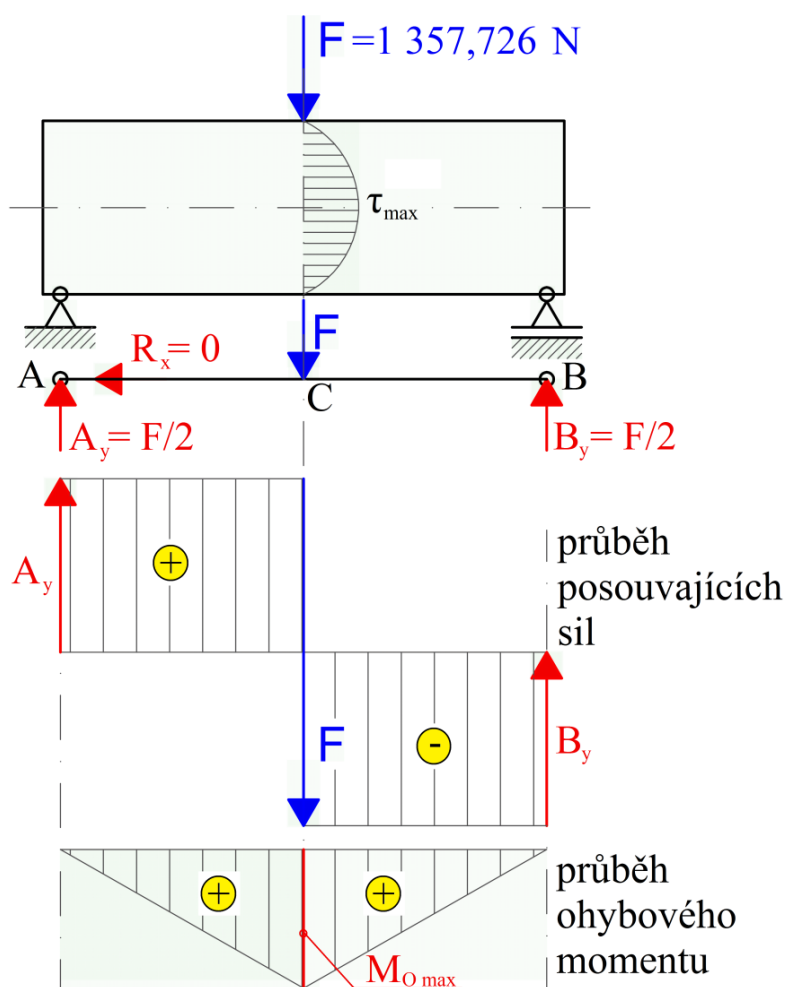
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau_{yx})^2} = \frac{-1,448}{2} - \sqrt{\left(\frac{-1,448}{2}\right)^2 + (1,901)^2} = -2,758 \text{ MPa}. \quad (43)$$

Maximální smykové napětí je reprezentováno poloměrem Mohrovy kružnice. Jeho velikost vypočteme následovně:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1,310 + 2,758}{2} = 2,034 \text{ MPa}. \quad (44)$$

Výpočty, které jsme provedli, se týkaly pouze jednoho bodu o souřadnicích $x = 20 \text{ mm}$ a $y = -10 \text{ mm}$. Ve skutečnosti musíme řešit vzhledem k symetrii úlohy napjatost v bodech mřížky s vodorovným krokem 10 mm a svislým 5 mm umístěné na čtvrtině modelu (viz obr. 18).

Průběhy ohybových momentů a posouvajících sil přes délku nosníku jsou vyobrazeny na obr. 19.



obr. 19 Znáznornění průběhů posouvajících sil a ohybových momentů.

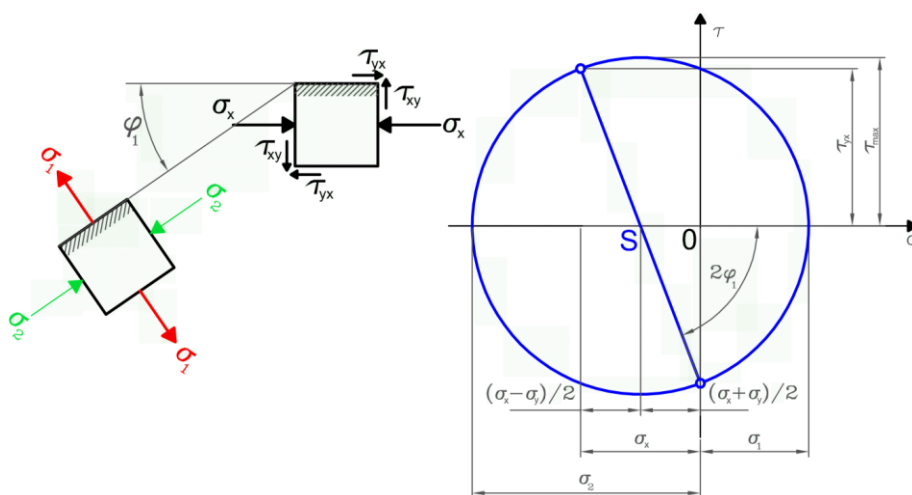
Orientaci hlavních napětí získáme z Mohrovy kružnice vyobrazené na obr. 20. Hodnota dvojnásobného úhlu souvisí se složkami napětí vztahem:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right|. \quad (45)$$

Odtud pak pro úhel φ_1 dostaneme:

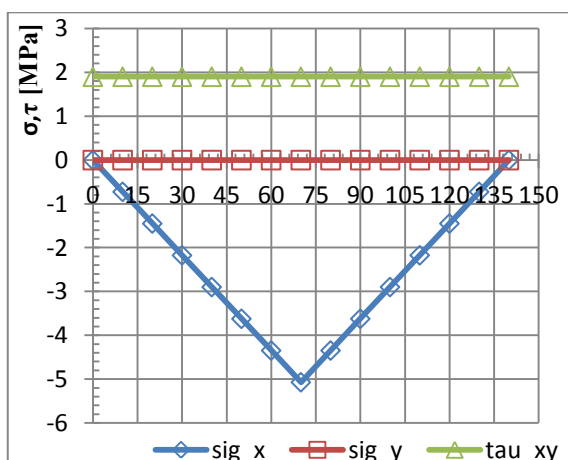
$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2 \cdot (-1,901)}{-1,448} \right| = 34,576 [^\circ]. \quad (46)$$

Rovinu ve které působí $\sigma_y = 0$ sklápíme do roviny σ_1 v protisměru hodinových ručiček o hodnotu $2\varphi_1$ (viz obr. 20).

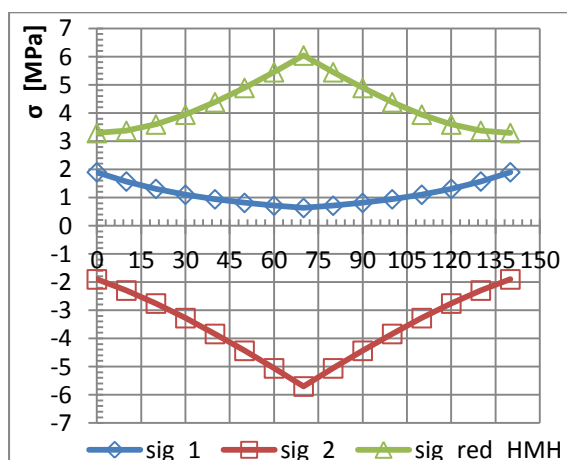


obr. 20 Mohrova kružnice sestavena pro vyšetřovaný bod ($x = 20 \text{ mm}$; $y = -10 \text{ mm}$).

Napjatost na přímce vzdálené 10 mm od neutrální osy, ležící v „tlakové“ polovině nosníku reprezentuje graf 1 a graf 2. Grafy jsou výsledkem analytického řešení. Zřetelně vidíme, že velikost smykové a také normálové složky ve směru osy y nezávisí na délkové souřadnici x . Výsledky z analytického řešení jsou pro konkrétní řez porovnány s výstupy z řešení numerického a experimentálního v příloze A.



graf 1 Hodnoty složek napětí podél linie $y = 10 \text{ mm}$.



graf 2 Velikost redukovaného napětí a napětí hlavních podél linie $y = 10 \text{ mm}$.

3.2 ŘEŠENÍ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

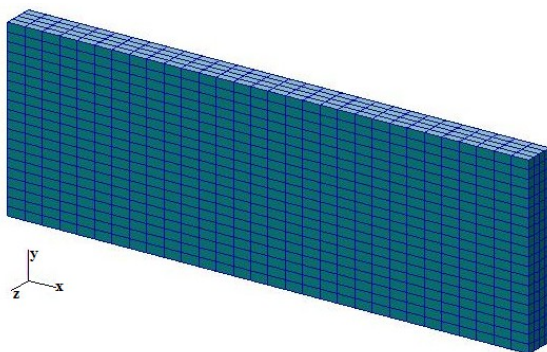
MKP řešení provedeme v programu Patran od společnosti MSC Software. Patran funguje jako modelář a pre/post procesor. Umožňuje vytvářet geometrii, provádět analýzu a vyhodnocovat získané výsledky. Snadno importujeme modely z jiných CAD programů. V jeho prostředí definujeme zatížení, okrajové podmínky, materiálové vlastnosti, provádíme simulace za různých podmínek a konečně zobrazujeme získané výsledky [28].

Jako řešič využijeme software MSC Nastran, který je používán pro strukturální a víceoborovou analýzu. MSC Nastran řeší problémy statické a dynamické. Dále pak problémy spojené s frekvenční charakteristikou modelu, kontaktní úlohy, nárazy mezi tělesy, nelineární a lomové chování materiálu [28].

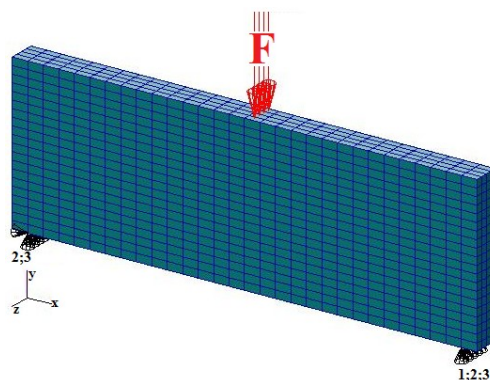
Vytvořený konečnoprvkový model je vyobrazen na obr. 21. Diskretizovaná součást je složená z elementů tvaru obdélníku s přibližnými rozměry $5 \times 2,5 \times 2,5$ mm. Nejdříve byla vytvořena síť na jedné z ploch modelu pomocí nástroje IsoMesh s tvarem elementu Quad a topologií Quad4. Příkazem Sweep byly elementy na ploše „vytaženy“ do prostoru.

3.2.1 Okrajové podmínky a použitý materiál

Materiál MKP modelu je CT 200, jehož vlastnosti jsou v dříve uvedené tab. 2. Zatěžující liniová síla působí v polovině délky modelu a namáhá nosník ohybovým momentem a posouvající silou. Model je uložen na jedné kloubové podpoře pevné a na druhé podpoře kloubové posuvné. Okrajové podmínky jsou aplikovány na uzly a na elementy (obr. 22).



obr. 21 Konečnoprvkový model.

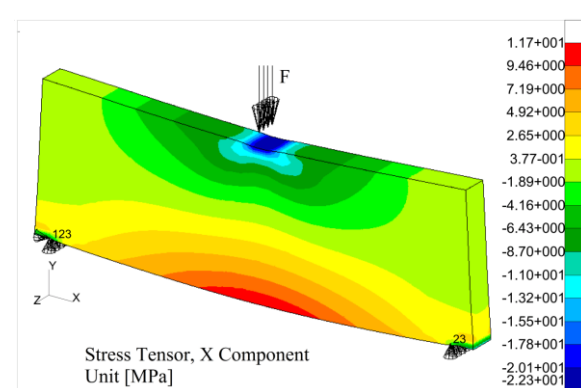


obr. 22 Aplikované okrajové podmínky.

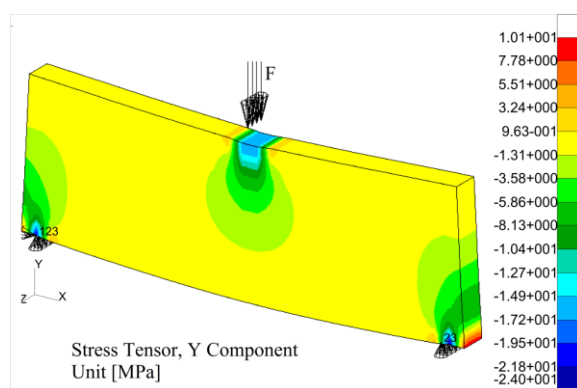
Informace o diskretizované součásti (počet elementů, počet uzlů atd.), spolu se způsobem zatížení a uložení uvádím přehledně v následující tabulce.

<i>tab. 3</i>	<i>Shrnutí informací o diskretizované součásti.</i>
Typ a počet elementů	CHEXA 2400
Typ a počet uzlů	GRID 3255
Počet zatěžujících sil (velikost)	1 (1 357,726 N)
Počet použitých materiálů (typ)	1 (CT 200)
Typ tělesa	3D, PSOLID (Lagrange)
Modul pružnosti	$E = 3\,124\text{ MPa}$
Poissonovo číslo	$\mu = 0,35$
Vazby	Podpora kloubová pevná, podpora kloubová posuvná
Rozměry trámku (délka, výška, tloušťka)	$148 \times 50 \times 9\text{ mm}$
Přibližné rozměry jednoho elementu (délka, výška, tloušťka)	$5 \times 2,5 \times 2,5\text{ mm}$

Po aplikování okrajových podmínek provedeme řešení. Na obr. 25 vidíme hodnoty redukovaného napětí. Na obr. 23 a obr. 24 pak normálové napětí ve směru osy x a ve směru osy y . My však musíme získat hodnoty napětí podél konkrétního řezu ($y = 10\text{ mm}$), abychom mohli získané výsledky porovnat s řešením analytickým a experimentálním.

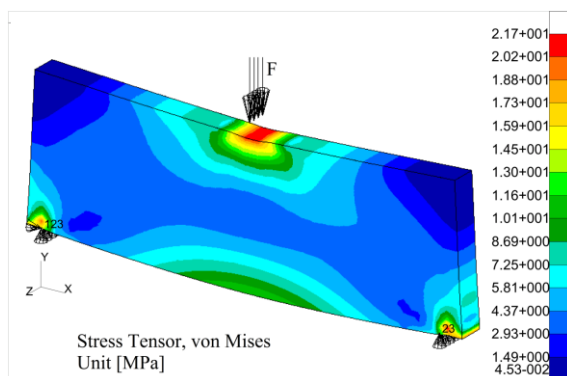


obr. 23 Grafické vyobrazení normálového napětí působícího ve směru osy x .

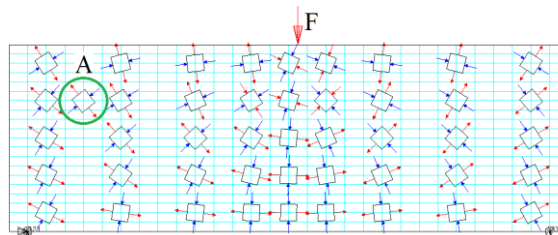


obr. 24 Grafické vyobrazení normálového napětí působícího ve směru osy y .

Pomocí programu snadno vykreslíme napětí podél určené trasy. Získané hodnoty exportujeme ve formátu .txt. Výsledky podél řezu $y = 10\text{ mm}$ jsou graficky porovnány v příloze A.



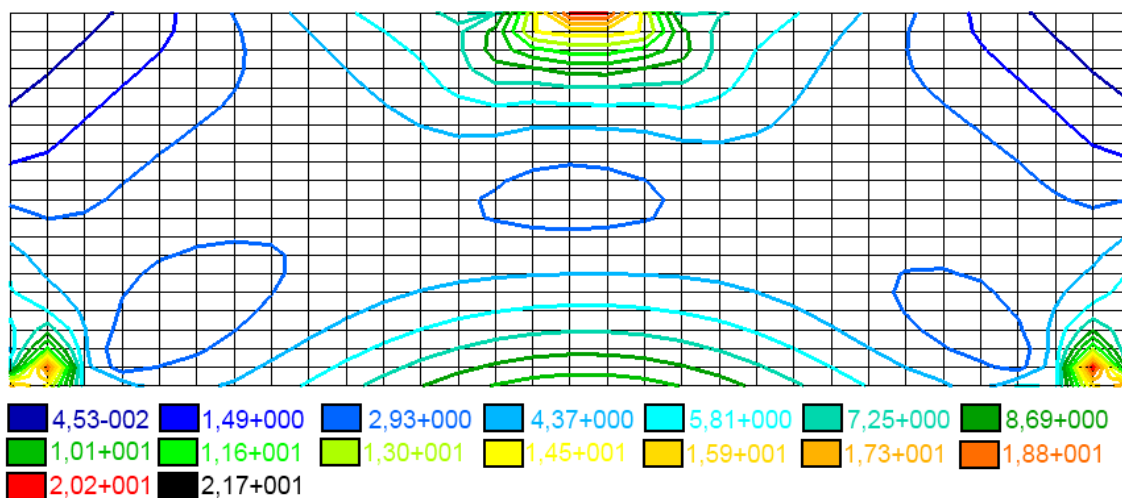
obr. 25 Grafické vyobrazení redukovaného napětí podle hypotézy HMH.



obr. 26 Znázornění orientace elementárních krychlíček v některých bodech nosníku. Červené šípky odpovídají σ_1 , modré šípky σ_2 .

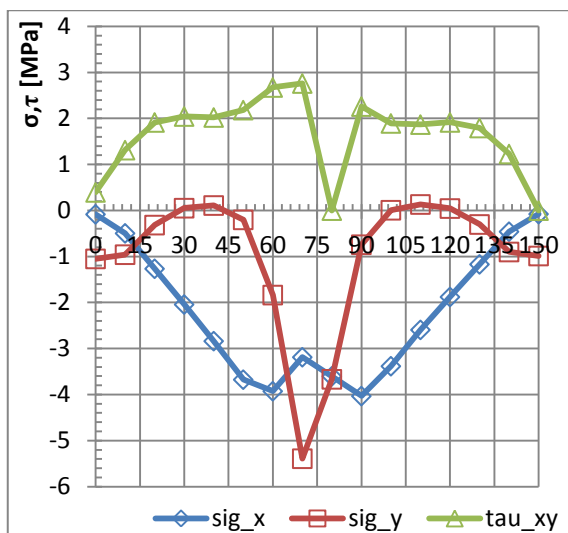
Pro názornost a následné porovnání zbývá určit orientaci hlavních napětí v bodě A (viz obr. 26) o souřadnicích $x = 20$ mm, $y = 10$ mm. Využijeme-li vztah (45) obdržíme:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2 \cdot (1,92)}{-1,26 - (-0,31)} \right| = 38,052 [^\circ]. \quad (47)$$

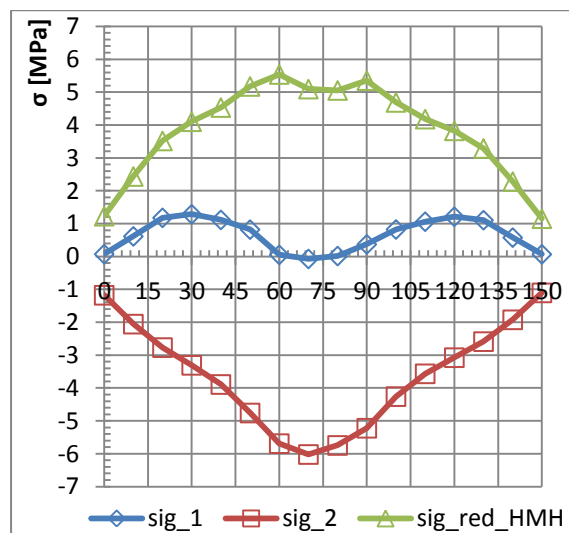


obr. 27 Linie znázorňující body o stejném redukovaném napětí podle hypotézy HMH v jednotkách [MPa]. Jedná se o tzv. ekviskalární hladiny intenzity napětí.

Níže uvádím pomocí grafu 3 a grafu 4 velikosti jednotlivých napětí ve vzdálenosti 10 mm od neutrální osy směrem k místu působení síly. Napětí se mění po délce nosníku (se souřadnicí x).



graf 3 Hodnoty složek napětí podél linie $y = 10 \text{ mm}$.



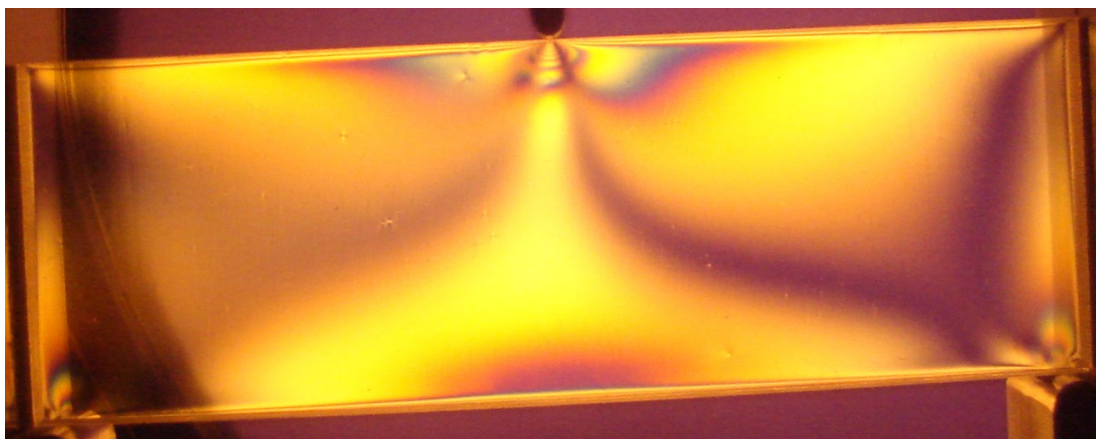
graf 4 Velikost redukovaného napětí a napětí hlavních podél linie $y = 10 \text{ mm}$.

3.3 EXPERIMENTÁLNÍ ANALÝZA ZATÍŽENÉHO NOSNÍKU

Provedeme experimentální analýzu zatíženého trámku tříbodovým ohybem. Vzorek je upnut v zatěžujícím rámu (viz obr. 28).

Fotoelasticimetrickým zkoumáním modelu získáme dvě informace. První informací jsou směry hlavních napětí, které bývají reprezentovány tzv. izoklinnými křivkami. Druhou informaci podávají čáry izochromatické (při použití monochromatického světla je nazýváme interferenční pruhy). Interferenční pruhy určují místa na modelu s konstantním rozdílem hlavních napětí.

V úvodu kapitoly stanovíme konstantu optické citlivosti, jejíž znalost je nutný předpoklad pro další zpracování a interpretaci izochromatických čar.



obr. 28 Model upnutý v zatěžujícím rámu. Dále vidíme polohu izokliny odpovídající natočení polarizačních rovin polaroidů o úhel 54° .

3.3.1 Konstanta optické citlivosti

Konstantu optické citlivosti stanovíme metodou stlačovaného kruhového disku, který upevníme do zatěžovacího rámu. Disk je vyroben z opticky citlivého materiálu, který odpovídá materiálu zkoumaného trámku (viz tab. 2). Abychom byli schopni stanovit konstantu optické citlivosti, musíme znát z analytického řešení hodnoty napětí v místě, ve kterém budeme určovat řády izochromatických pruhů. Pro případ stlačovaného disku jsou to vztahy (20) a (21).

Kruhový disk byl postupně zatěžován centrickou tlakovou silou. Hodnoty dvojlomů a odpovídající hodnoty sil, které tyto dvojlomy ve středu disku způsobily, jsou zaznamenány v tab. 4.

Provedeme ukázkový výpočet konstanty optické citlivosti příslušející síle $F = 7\,105\text{ N}$, která vyvolala dvojlom $m = 8$. Vztah udávající hodnotu konstanty optické citlivosti nabývá u metody stlačovaného disku tvar (21). Dosazením získáme:

$$k_i^c = \frac{8 \cdot F_i}{\pi \cdot d \cdot m_i} = k_8^c = \frac{8 \cdot F_8}{\pi \cdot d \cdot m_8} = \frac{8 \cdot 7105}{3,1416 \cdot 130 \cdot 8} = 17,397 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right], \quad (48)$$

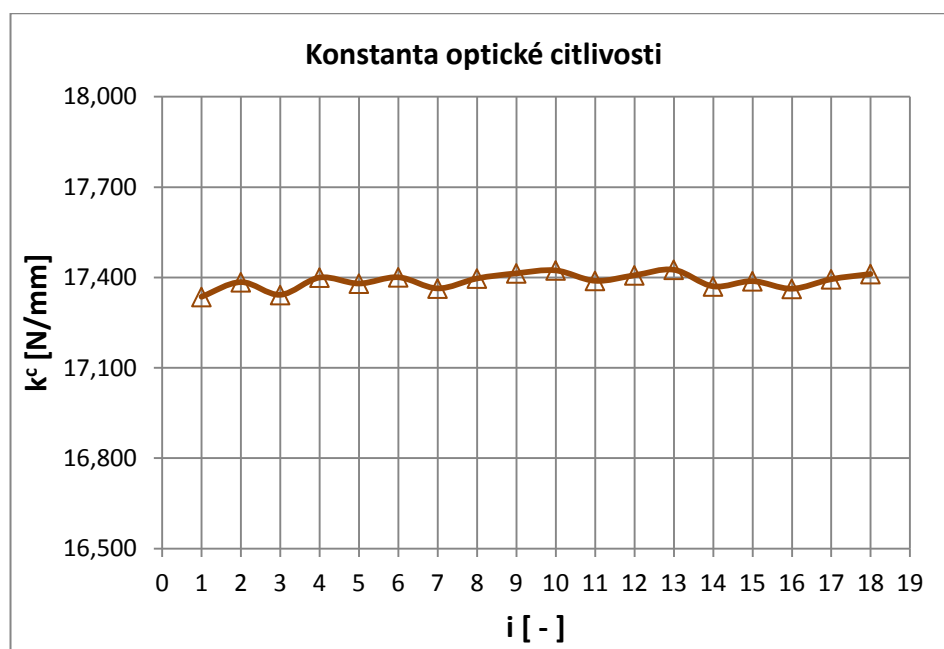
což je hodnota konstanty optické citlivosti vzhledem k $i = 8$ ($i = 1, \dots, 18$). Výpočet pro ostatní i je analogický a lze ho provést ve vhodném tabulkovém procesoru. Výsledky jsou uvedeny v tab. 4.

tab. 4

i	m	F [N]	k^c [N/mm]
0	0	0	—
1	1	885	17,336
2	2	1775	17,385
3	3	2656	17,342
4	4	3593	17,400
5	5	4474	17,380
6	6	5330	17,401
7	7	6205	17,364
8	8	7105	17,397
9	9	8001	17,414

Stanovení konstanty optické citlivosti.

i	m	F [N]	k^c [N/mm]
10	10	8895	17,424
11	11	9765	17,389
12	12	10664	17,407
13	13	11565	17,426
14	14	12415	17,371
15	15	13315	17,388
16	16	14182	17,363
17	17	15096	17,394
18	18	16000	17,412



graf 5 Velikost konstanty optické citlivosti v jednotlivých měřeních.

Výslednou konstantu optické citlivosti materiálu CT 200 získáme jako průměrnou hodnotu danou vztahem:

$$k^c = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n k_i^c = \frac{1}{18} \cdot (17,336 + 17,385 + 17,342 + \dots + 17,412) = \quad (49)$$

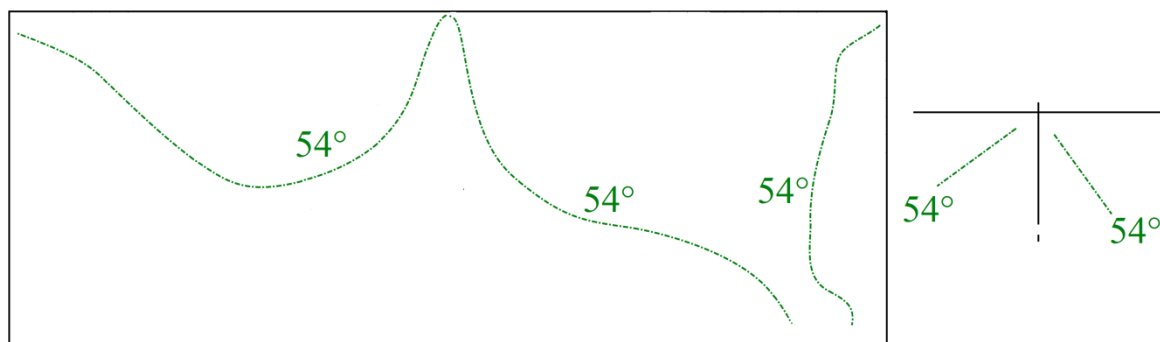
$$= 17,388 \text{ [N/mm]}$$

3.3.2 Zjištění průběhů izoklinných křivek

Nutností je požití přímkově polarizovaného světla. Model umístíme do polarizačního přístroje pro průběžné bílé světlo (obr. 10). Obraz izoklin je rušen duhově zbarvenými čarami izochromatickými.

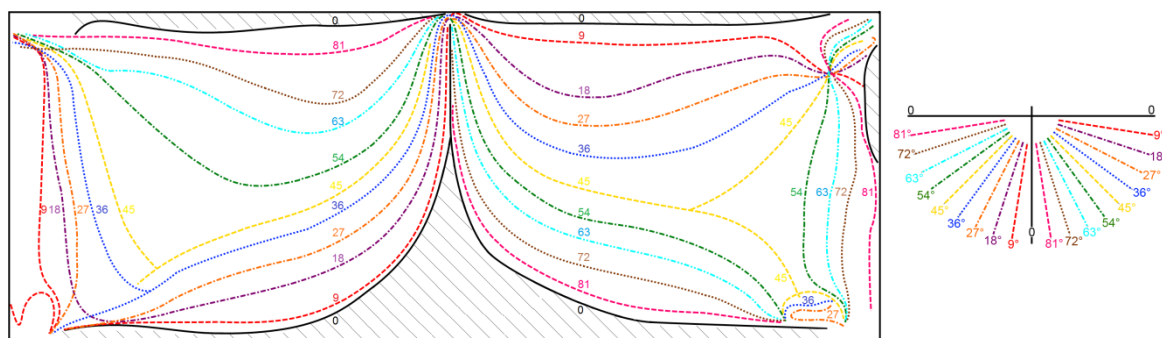
Optické osy polarizátoru a analyzátoru musí být vzájemně kolmé. Optická osa polarizátoru je ve vodorovném směru a optická osa analyzátoru ve svislém směru. Vyfotografujeme izoklinu a přiřadíme ji úhlový parametr φ . Následně provádíme synchronní rotaci zkřížených filtrů po úhlových přírůstcích, které se liší hodnotou u modelu trvale deformovaného (dále jen TDN) a u nosníku zatíženého (dále jen ZN). Po každém pootočení daný zjev izoklinné křivky vyfotografujeme a vždy přiřadíme úhlový parametr udávající úhel natočení polarizačních rovin. Při pootočení rovin o úhel 90° se zjevy opakují.

Na obr. 29 je vykreslena samostatně izoklina při natočení optických os polaroidů o úhel 54° (odpovídající fotografie je na obr. 28).



obr. 29 Nákres izokliny 54° .

Izokliny příslušející různým úhlům natočení polarizačních filtrů jsou překresleny na společný výkres (obr. 30).



obr. 30 Izokliny všech parametrů překreslíme na společný výkres. Vždy přiložíme orientační vějíř.

3.3.3 Zjištění průběhu izochromatických křivek

Světelná intenzita za analyzátozem je závislá na úhlu natočení polarizačních rovin polarizátorů a dále na hodnotě fázového rozdílu φ . Protože měření rozdílu hlavních napětí provádíme v polarizačním přístroji sestaveného pro kruhovou polarizaci, nezávisí světelná intenzita na úhlu natočení polarizátorů a můžeme psát [23]:

$$I = \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (50)$$

Nulová světelná intenzita bude v místech kde $\varphi = 2m\pi$ (pro $m = 0, 1, 2, \dots$). Hodnotu m nazýváme relativním dvojlomem. Vznikají čáry izochromatické (interferenční pruhy), kterým později přiřadíme odpovídající hodnoty relativních dvojlomů.

Pro získání představy o správné interpretaci interferenčních a izoklinných křivek je přínosný článek [29], který se zabývá stanovením zmíněných čar na základě

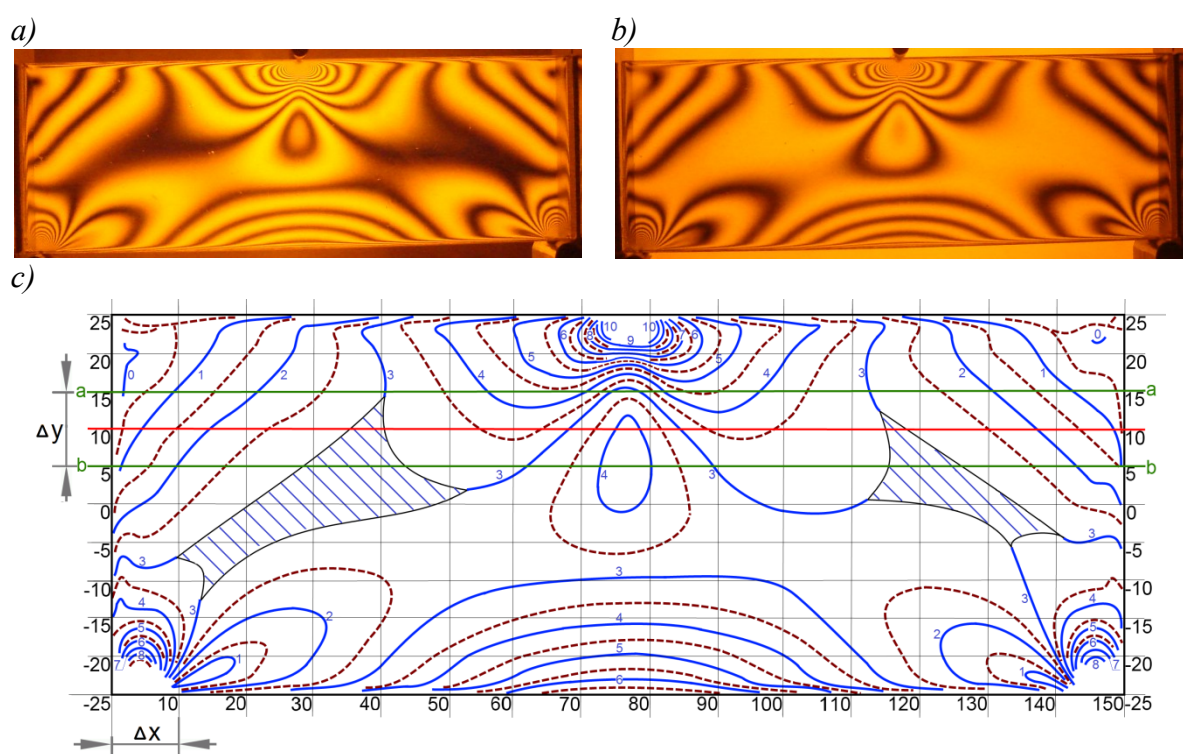
analytického řešení vetknutého nosníku. Zároveň je zde provedeno porovnání s řešením experimentálním.

Při sestavení polarizační sestavy tak, aby optické osy polarizátorů byly rovnoběžné, získáme kruhovou polarizaci doplňující (komplementární). Světelnou intenzitu vyjádříme za analyzátozem vztahem:

$$I = 1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (51)$$

Vzniknou izochromaty polovičních řádů v barvách komplementárních k barvám izochromat řádů celých [19].

Použijeme polarizační aparát s monochromatickým světlem podle schématu na obr. 11. Mezi polarizátorem a modelem je umístěná první čtvrtvlnová deska a druhá čtvrtvlnová deska je mezi modelem a analyzátozem. Optické osy čtvrtvlnových desek musí navzájem svírat pravý úhel. Optické osy polarizátorů mohou být vzájemně kolmé nebo rovnoběžné. V prvním případě získáme obraz interferenčních pruhů celých řádů (obr. 31a). Ve druhém případě obdržíme obraz polovičních řádů (obr. 31b). Čáry konstantních hodnot rozdílu hlavních napětí obou druhů zakreslíme do jednoho obrázku (obr. 31c).

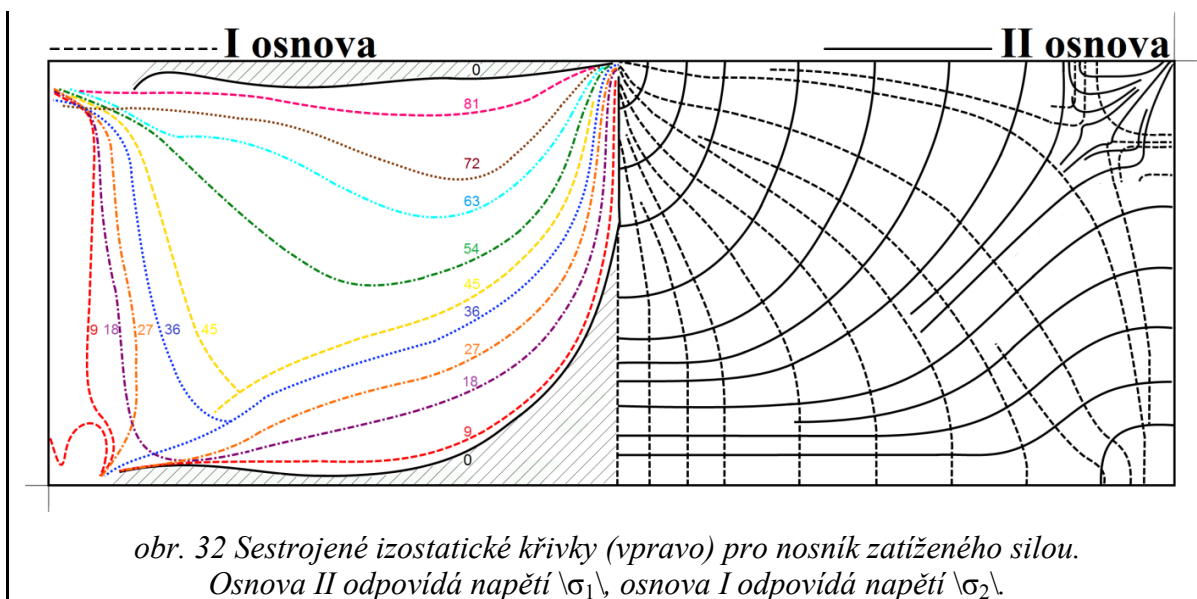


obr. 31 a) Základní kruhová polarizace nahoře vlevo,
b) kruhová polarizace doplňující,
c) obraz izochromat celých řádů (modře) a polovičních řádů (červeně)
v kruhově polarizovaném světle pro ZN.

Obrázek je předpřipraven pro separaci hlavních napětí.

3.3.4 Konstrukce izostatických křivek

Nákres izoklinních křivek z obr. 30 slouží jako předloha k vykreslení křivek izostatických. Izostaty první a druhé osnovy udávají v každém bodě modelu směry hlavních napětí a pro případ zatíženého trámku jsou znázorněny na obr. 32. Podél zmíněných čar nepůsobí žádná smyková napětí. Jejich hustotu volíme takovou, aby podávaly dostatečnou informaci o „toku“ hlavních napětí modelem. Více o konstrukci izostatických čar najdeme např. v [21] a [29].



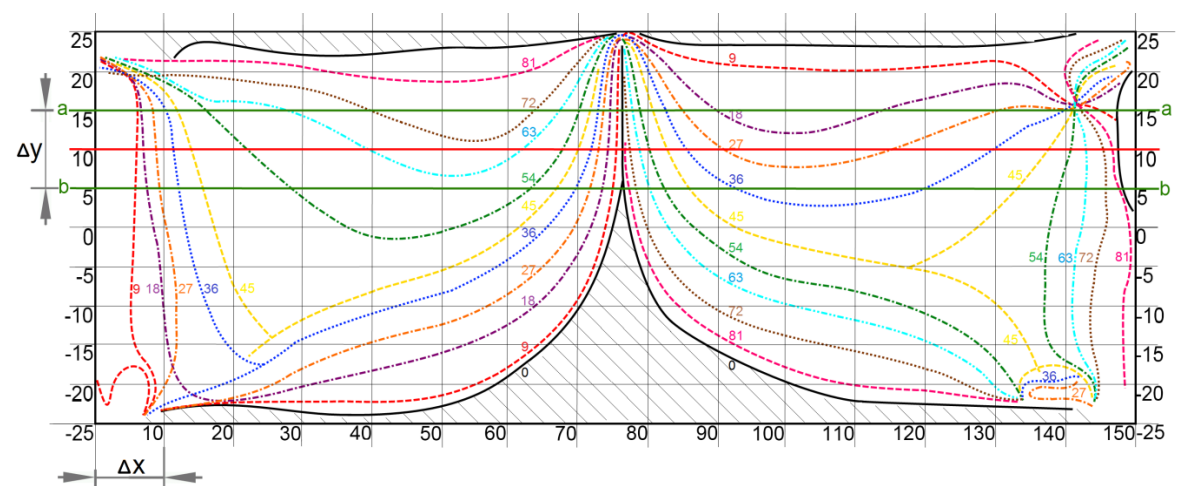
Konstrukci izostatických křivek komplikují kladné a negativní singulární body. Jsou to body, ve kterých je rozdíl hlavních napětí nulový. Singulární bod je kladný, jestliže se izokliny v jeho blízkosti otáčí ve shodném směru jako je rotace polarizátorů [19]. Na obr. 32 v horní pravé části je vidět tzv. negativní singulární bod. Izotropní body ulehčují určení řádů izochromat, protože jsou řádu $m = 0$ a řády musí narůstat postupně. Více o řešení průběhu izostat v okolí singulárních bodů a vyhledání asymptot můžeme najít v literatuře [19].

3.3.5 Separace hlavních napětí metodou rozdílu smykových napětí

Využijeme metodu rozdílu smykových napětí (viz kapitola 2.8.1), která nám umožní řešení bez nutnosti dalšího experimentálního měření. Princip metody spočívá v řešení statických rovnic rovnováhy (24). Rovnice rovnováhy mohou být vyjádřeny ve více souřadných systémech [16]. V našem případě je výhodný kartézský souřadný systém.

Abychom mohli využít metodu rozdílu smykových napětí, musíme mít k dispozici nákresy izoklinních a izochromatických křivek. Na výkresech provedeme několik

vodorovných a svislých řezů. Zjednodušení výpočtů nastane, zvolíme-li svislý krok poloviční vzhledem ke kroku vodorovnému (viz obr. 31c a obr. 33).



obr. 33 Na obrazech izoklin vytvoříme mřížku s vodorovným krokem $|\Delta x|$ a svislým krokem $|\Delta y|$. Zde se jedná o případ zatíženého nosníku.

Řešení budeme demonstrovat na řezu ve vzdálenosti $y = 10 \text{ mm}$ u ZN, který nazýváme hlavním řezem (na obr. 31c a obr. 33 červeně). Postup je zcela shodný i pro TDN. Dále provedeme dva další řezy ve vzdálenosti $\pm \Delta x/2$ od hlavního řezu (viz obr. 31c a obr. 33 zeleně). V jednotlivých bodech hlavního řezu i v řezech vedlejších stanovíme hodnoty rozdílu hlavních napětí z izochromatických křivek. Podobně určíme úhlové parametry dané křivkami izoklinnými. Sousední řezy okolo hlavního řezu označíme a - horní a b - dolní sousední řez.

tab. 5 Ukázka aplikace metody rozdílu smykových napětí u ZN. Řez $y = 10 \text{ mm}$.

x	α	α_a	α_b	$(\sigma_x - \sigma_y)$	$(\sigma_x - \sigma_y)_a$	$(\sigma_x - \sigma_y)_b$	τ_{xy} *A
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,966	0,000
10	27,900	31,500	27,000	2,898	1,932	3,864	1,199
20	51,750	59,400	48,600	4,348	3,381	5,072	2,114
30	58,500	65,250	54,900	5,236	4,589	5,797	2,333

Pozn.: Kompletní verze této tabulky je uvedena v příloze A (tab. 8).

$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,b}$	$\Delta \tau_{xy}$ *B	$\Delta \tau_{xy,stř}$ *C	σ_x *D	σ_y *E	σ_1 *F	σ_2 *F	σ_{red} *G HMH
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,861	1,563	-0,702	-0,351	-0,351	-1,980	0,283	-2,615	2,768
1,482	2,516	-1,034	-0,868	-1,220	-0,205	1,462	-2,886	3,832
1,745	2,727	-0,982	-1,008	-2,228	0,149	1,579	-3,658	4,652

*^A Ze vztahu (30) vypočteme hodnoty smykových napětí pro všechna i . Pro třetí řádek ($i = 3$) dostaneme:

$$\tau_{xy,3} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_3 \cdot \sin(2\alpha_3) = \frac{1}{2} \cdot 4,348 \cdot \sin(2 \cdot 51,750) = 2,114 \text{ MPa.} \quad (52)$$

Postup výpočtu smykového napětí je analogický i pro $\tau_{xy,a,i}$ a $\tau_{xy,b,i}$ v řezech a a b vedle hlavního řezu.

*^B Hodnotu $\Delta\tau_{xy,i}$ vypočteme pomocí hodnot z vedlejších řezů následovně:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{xy,i} &= \tau_{xy,a,i} - \tau_{xy,b,i} = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{a,i} \cdot \sin(2\alpha_{a,i}) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{b,i} \cdot \sin(2\alpha_{b,i}). \end{aligned} \quad (53)$$

Pro řez ve vzdálenosti $y = 10$ ($i = 3$) dostáváme dle rovnice (53):

$$\Delta\tau_{xy,3} = \frac{1}{2} \cdot 3,381 \cdot \sin(2 \cdot 59,400) - \frac{1}{2} \cdot 5,072 \cdot \sin(2 \cdot 48,600) = -1,034 \text{ MPa.} \quad (54)$$

Pro řez ve vzdálenosti $y = 10$ ($i = 2$) dostáváme dle rovnice (53):

$$\Delta\tau_{xy,2} = \frac{1}{2} \cdot 1,932 \cdot \sin(2 \cdot 31,500) - \frac{1}{2} \cdot 3,864 \cdot \sin(2 \cdot 27,000) = -0,702 \text{ MPa.} \quad (55)$$

A pro $x = 0$ ($i = 1$) v řezu ve vzdálenosti $y = 10$ mm:

$$\Delta\tau_{xy,1} = \frac{1}{2} \cdot 1,932 \cdot \sin(2 \cdot 0) - \frac{1}{2} \cdot 0,966 \cdot \sin(2 \cdot 0) = 0 \text{ MPa.} \quad (56)$$

*^C Změnu středního smykového napětí můžeme vyjádřit pomocí vztahu:

$$\Delta\tau_{xy,stř i} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,i} + \Delta\tau_{xy,(i-1)}). \quad (57)$$

Dosazení výsledků z rovnic (54), (55) a (56) do rovnice (57) dostáváme postupně pro $i = 3;2;1$:

$$\Delta\tau_{xy,stř,3} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,3} + \Delta\tau_{xy,2}) = \frac{1}{2}(-1,034 - 0,702) = -0,868 \text{ MPa,} \quad (58)$$

$$\Delta\tau_{xy,stř,2} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,2} + \Delta\tau_{xy,1}) = \frac{1}{2}(-0,702 + 0) = -0,351 \text{ MPa,} \quad (59)$$

$$\Delta\tau_{xy,stř,1} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,1} + \Delta\tau_{xy,0}) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \text{ MPa.} \quad (60)$$

*^D Hodnota normálového napětí je pak dána úpravou vztahu (27) na tvar:

$$\sigma_{xi} = \sigma_{x0} \pm \sum_{i=1}^i \Delta\tau_{xy,stř i}. \quad (61)$$

Dále víme, že okraj modelu v počátečním integračním bodě je nezatížený a sklon hrany je malý, proto se hodnota tečného normálového napětí neprojeví ve vztahu (61). Za těchto podmínek nabude vztah nový tvar:

$$\sigma_{xi} = \sum_{i=1}^i \Delta\tau_{xy,stř i}. \quad (62)$$

Hodnota normálového napětí ve směru osy x (pro $x = 20$ mm) v řezu ve vzdálenosti $y = 10$ mm bude:

$$\begin{aligned}\sigma_{x3} &= \sum_{i=1}^3 \Delta\tau_{xy,stř i} = \Delta\tau_{xy,stř 1} + \Delta\tau_{xy,stř 2} + \Delta\tau_{xy,stř 3} = \\ &= 0 - 0,351 - 0,868 = -1,220 \text{ MPa.}\end{aligned}\quad (63)$$

*^E Hodnotu normálového napětí ve směru druhé souřadné osy y získáme pomocí Mohrovy kružnice napětí:

$$\sigma_{y3} = \sigma_{x3} \pm (\sigma_1 - \sigma_2)_3 \cdot \cos(2\alpha_3). \quad (64)$$

Dosažením známých hodnot dostáváme:

$$\sigma_{y3} = -1,220 - 4,348 \cdot \cos(2 \cdot 51,750) = -0,205. \quad (65)$$

*^F Jestliže známe hodnoty normálových napětí ve směrech souřadných os a taky hodnotu smykového napětí, snadno poté dopočteme hlavní napětí podle vztahu (33).

Velikosti hlavních napětí tedy budou:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{-1,220 - 0,205}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1,220 + 0,205}{2}\right)^2 + (2,114)^2} = 1,462 \text{ MPa,} \\ \sigma_2 &= \frac{-1,220 - 0,205}{2} - \sqrt{\left(\frac{-1,220 + 0,205}{2}\right)^2 + (2,114)^2} = -2,886 \text{ MPa.}\end{aligned}\quad (66)$$

*^G Předposledním krokem vypočteme velikost redukovaného napětí. Použijeme HMM hypotézu (viz rovnice (34)). Dosažením obdržíme:

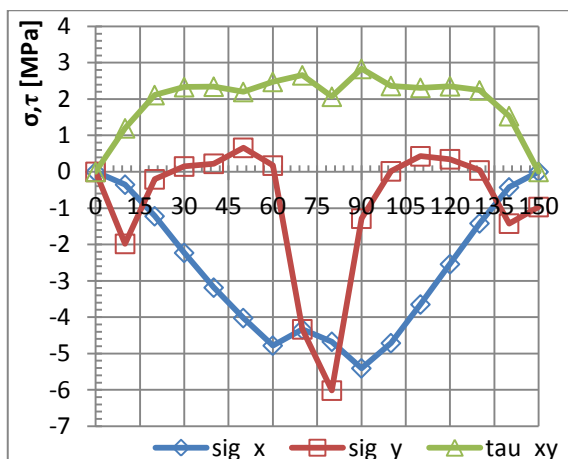
$$\sigma_{red}^{HMM} = \sqrt{1,462^2 + (-2,886)^2} - 1,462 \cdot (-2,886) = 3,832 \text{ MPa.} \quad (67)$$

Na závěr ještě určíme orientaci elementární krychličky v bodě $y = 10$ mm a $x = 20$ mm ze vztahu (45):

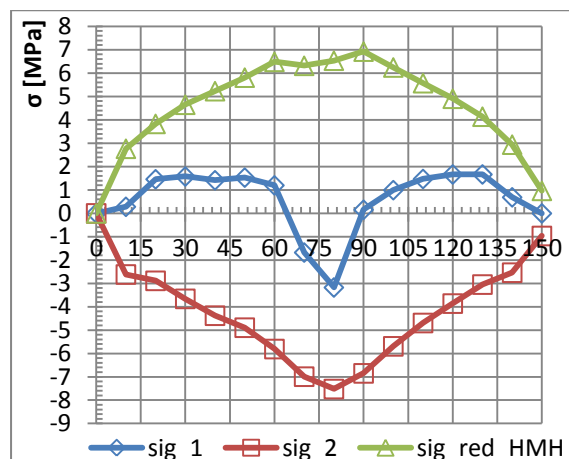
$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2 \cdot (2,114)}{-1,220 - (-0,205)} \right| = 38,25 [^\circ]. \quad (68)$$

Obdobným způsobem postupujeme podél celé délky hlavního řezu. Jakmile provedeme všechny výpočty a vyplníme celou tab. 5, pak vykreslením získáme graf 6 a graf 7.

Postupem uvedeným výše vyřešíme rozložení napětí podél všech řezů. Posunujeme se o hodnotu Δy nahoru nebo dolů a odečítáme řady izochromat a úhlové parametry izoklin. Hodnoty v jistých bodech mřížky máme již vždy stanoveny z předchozího odečtu. Součástí bakalářské práce bylo vyšetření všech řezů u ZN, ale z důvodu úspory uvádím v příloze A pouze řez jeden pro $y = 10$ mm.



graf 6 Hodnoty složek napětí podél hlavního řezu $y = 10$ mm.



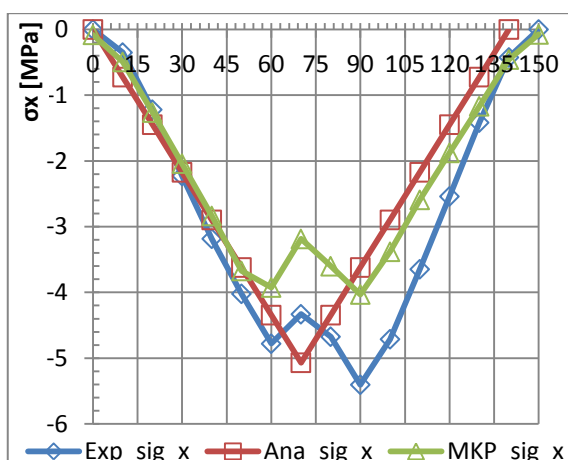
graf 7 Velikost redukovaného napětí a napětí hlavních podél řezu $y = 10$ mm.

3.4 SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ JEDNOTLIVÝCH PŘÍSTUPŮ

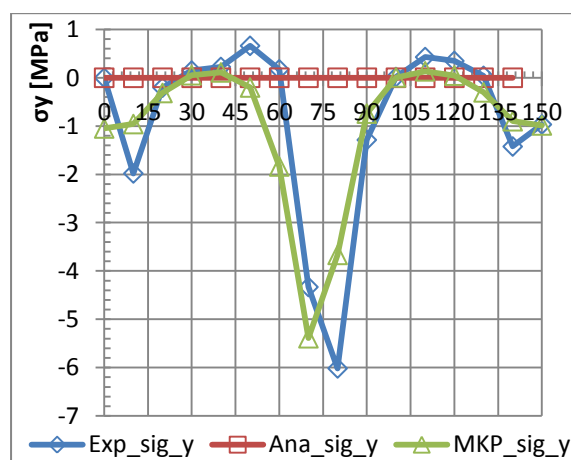
Všechny tři způsoby řešení zatíženého nosníku jsme provedli s cílem ověřit experimentální metodu, její přesnost a spolehlivost. V následující části se pokusím shrnout výše dosažené výsledky.

3.4.1 Velikosti složek napětí

Porovnání provedeme nejlépe vynesemím hodnot do grafu (graf 8 a graf 9). Analytický způsob můžeme vzhledem k numerickému pro náš případ považovat za méně přesný. Důkazem je fakt, že uvažujeme normálová napětí ve směru souřadné osy y nulová. Ve skutečnosti však nulová nejsou. Analytické řešení nebere v potaz vliv podpor na napjatost. Vidíme, že způsob fluktuace napětí se přibližně shoduje u experimentálního a numerického přístupu. Otázka, jaká je shoda ve výsledcích vzhledem k oběma metodám, přináší rozsáhlejšímu statistickému zpracování.



graf 8 Hodnoty složky napětí σ_x z řešení experimentálního, analytického a numerického podél linie $y = 10$ mm.

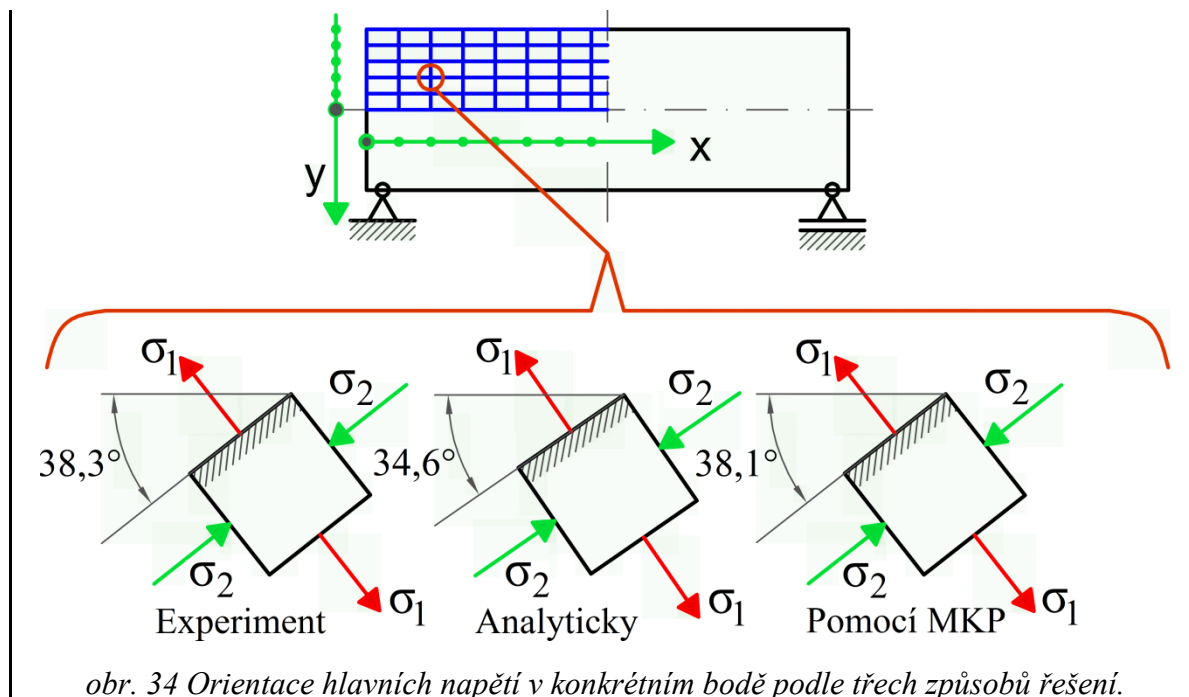


graf 9 Hodnoty složky napětí σ_y z řešení experimentálního, analytického a numerického podél linie $y = 10$ mm.

V příloze A nalezneme grafické vyobrazení průběhů ostatních napětí včetně napětí redukovaného.

3.4.2 Orientace hlavních napětí

V kapitole o experimentálním, analytickém a numerickém řešení jsem uváděl výpočet udávající orientaci hlavních napětí v bodě o souřadnicích $x = 20 \text{ mm}$ a $y = 10 \text{ mm}$. Zde uvedu pouze grafické vyobrazení zmíněné orientace podle všech třech přístupů.



obr. 34 Orientace hlavních napětí v konkrétním bodě podle třech způsobů řešení.

Z uvedeného srovnání je zřejmé, že experimentální metoda vede ke správným výsledkům a můžeme ji následně využít k analýze trvale deformovaného nosníku. Přesnost experimentálního vyšetření záleží především na správném odečtu řádů interferenčních pruhů a parametrů izoklinných čar, proto musíme této činnosti věnovat větší pozornost.

4 VYŠETŘENÍ NAPJATOSTI V TRVALE DEFORMOVANÉM MODELU

Součástí práce bylo vytvoření modelu, který by vykazoval jistou úroveň zbytkové napjatosti. Zbytková napětí v součástech z plastů vznikají vlivem jejich zpracování. Mezi nejčastěji používané technologie patří např. vyfukování, vytlačování, vstřikování, formování za tepla a mnoho dalších [30]. Zpracování probíhá většinou za zvýšené teploty, což je jeden z hlavních iniciátorů vzniku trvalé napjatosti.



obr. 35 Zkoumaný trvale deformovaný model vyrobený z materiálu CT 200.

Na obr. 36 vidíme přístroj využívaný u odrazové fotoelasticimetrie (Photostress). Odrazovou plochu tvoří hliníková fólie, která je nalepená na spodní ploše modelu z obr. 35. Stručný postup metodiky určování relativního dvojlomu na základě posloupnosti barev (viz tab. 6) je uveden v normě ASTM D4093.

tab. 6

Barva	Relativní zpoždění [nm]	Řád pruhu δ/λ
Černá	0	0
Šedá	160	0,28
Bílá	260	0,45
Žlutá	350	0,60
Oranžová	460	0,79
Červená	520	0,90
Rozhraní 1 ^B	577	1,00
Modrá	620	1,06
Modrozelená	700	1,20
Zelenožlutá	800	1,38

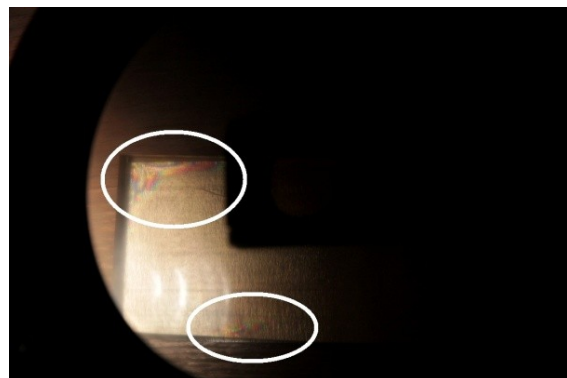
Posloupnost barev (převzato z [20])

Barva	Relativní zpoždění [nm]	Řád pruhu δ/λ
Oranžová	940	1,62
Červená	1050	1,81
Rozhraní 2 ^B	1150	2,00
Zelená	1350	2,33
Zelenožlutá	1450	2,50
Růžová	1550	2,67
Rozhraní 3 ^B	1730	3,00
Zelená	1800	3,10
Růžová	2100	3,60
Rozhraní 4 ^B	2300	4,00
Zelená	2400	4,13

Při použití této metody nejsou vyšší řády po tělese viditelné. Jsme schopni stanovit velikosti napětí pouze v méně namáhaných místech (znázorněných na obr. 37) tj. nejvýše do 4. řádu izochromatické čáry. Z tohoto důvodu využijeme metodu transmisní fotoelasticimetrie.



obr. 36 Reflexní polariskop, model 030.



obr. 37 Viditelné izochromaty do 4. řádu.

4.1 ANALÝZA TRANSMISNÍ FOTOELASTICIMETRIÍ

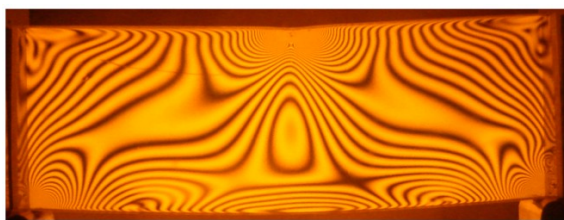
K zjištění rozložení napjatosti uvnitř nosníku použijeme transmisní fotoelasticimetrii a metodu rozdílu smykových napětí, jejíž správnost a vhodnost k této analýze jsme ověřili v kapitole 3.

Součást vykazující jistou úroveň zbytkových napětí byla získána pomocí zatěžujícího rámu pro tříbodový ohyb za zvýšené teploty vzorku. Výsledkem je mírně deformovaný nosník, který je vyobrazen na obr. 35 a obr. 39.

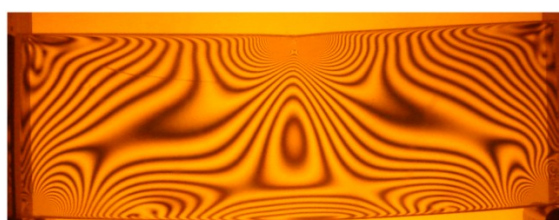
4.1.1 Vyšetření izochromatických čar

Probíhá na sestavě polariskopu s kruhově polarizovaným monochromatickým světlem. V zorném poli analyzátoru vznikají izochromaty (přesněji interferenční pruhy) celých řádů (obr. 38a), které zachytíme fotoaparátem. V téže sestavě vyrovnáme optické osy polarizátorů do paralelního směru (kruhová polarizace komplementární) a izochromaty polovičních řádů (obr. 38b) vyfotografujeme.

a)

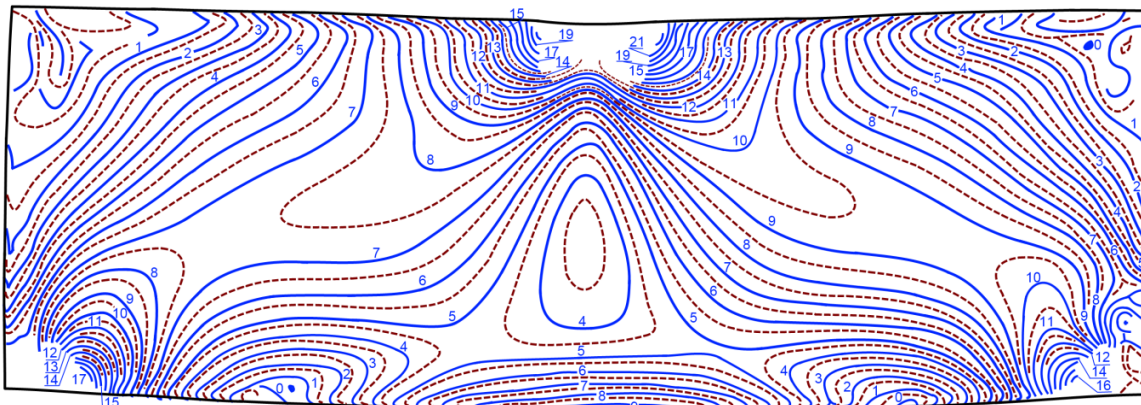


b)



obr. 38 Izochromaty celých řádů (a) a polovičních řádů (b).

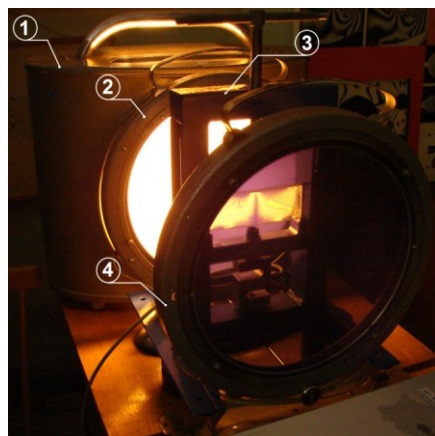
Překreslením křivek na jeden společný výkres získáme obr. 39. Na téže obrázku jsou izochromatickým pruhům celých řádů přiřazeny jejich celočíselné hodnoty relativního dvojlomu. Leží-li např. izochromata mezi pruhy řádu 8 a 9, pak je její řád 8,5.



obr. 39 Překreslené izochromaty celých řádů (modře) a polovičních řádů (červeně).

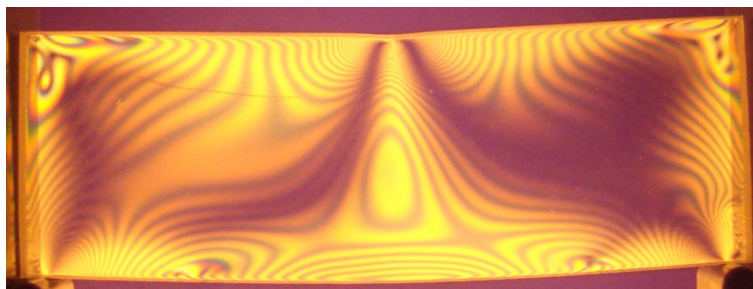
4.1.2 Zjištění izoklinných křivek

V bílém přímkově polarizovaném světle (viz obr. 40) vidíme při postupném natáčení polarizačních rovin polarizátorů izoklinny jako černé čáry. Rotace je uskutečněna zpočátku po úhlových přírůstcích 5° až do hodnoty 20° , poté je velikost kroku zvětšena na 10° .

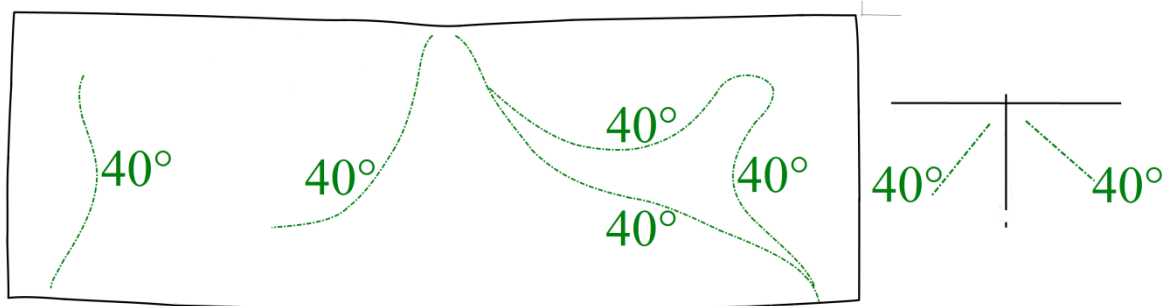


obr. 40 Polarizační přístroj s bílým přímkově polarizovaným světlem.
1 - zdroj světla, 2 - polarizátor,
3- rám s vloženým modelem, 4 - analyzátor.

Pro případ natočení polarizačních rovin o úhel 40° je příslušející izoklinná čára vyfotografována na obr. 41 a překreslena na obr. 42.

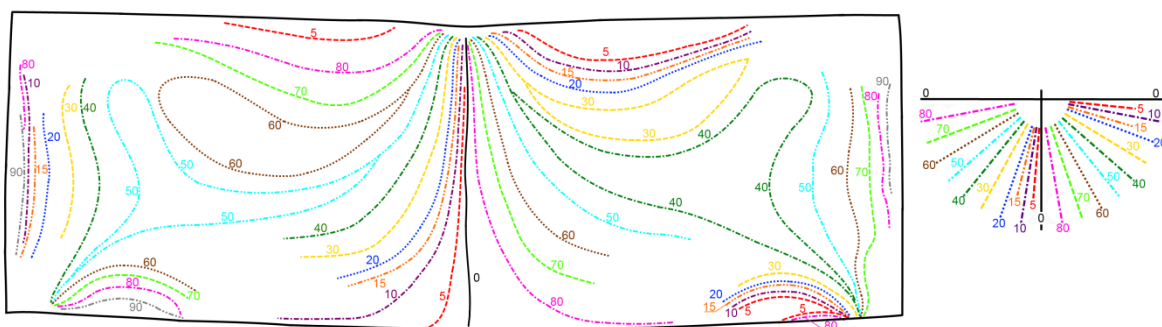


obr. 41 Fotka Izokliny při natočení polaroidů o úhel 40° .



obr. 42 Izoklina 40° u trvale deformovaného nosníku.

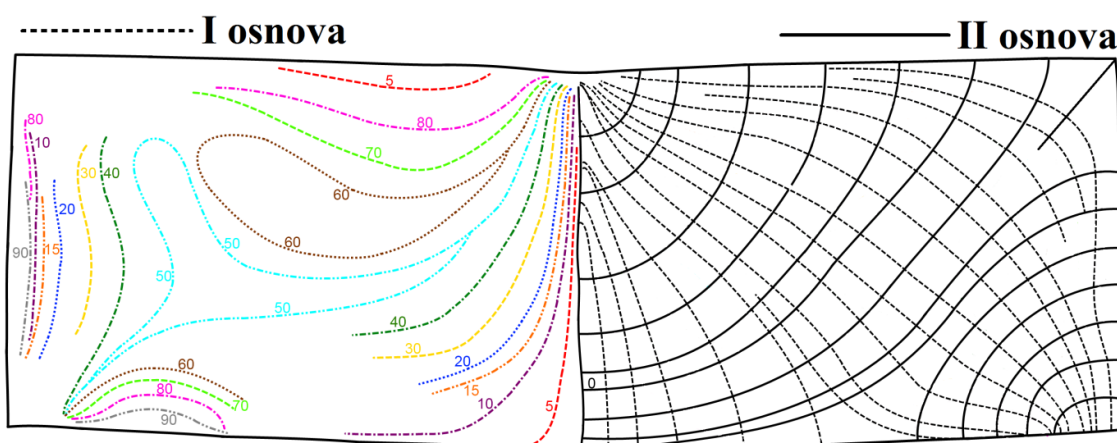
Izokliny všech parametrů překreslíme na společný výkres — obr. 43.



obr. 43 Vykreslené izoklinné křivky parametru 0° až 90° u TDN, vpravo je uveden orientační vějíř.

4.1.3 Izostatické křivky

Konstrukce křivek, které reprezentují směry hlavních napětí („napěťový tok“) vyžaduje znalost křivek izoklinných.



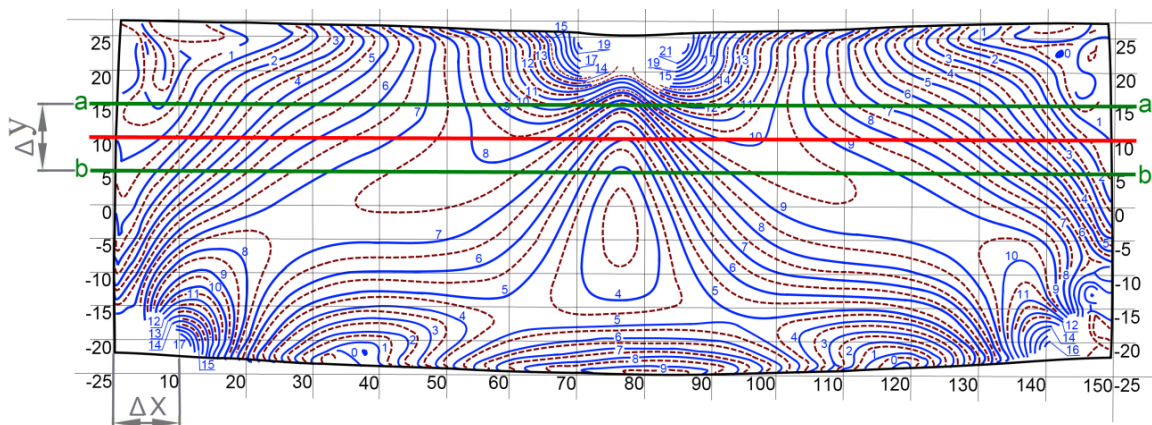
obr. 44 Sestrojené izostatické křivky (vpravo) pro nosník se zbytkovými napětími. Osnova II odpovídá napětí σ_1 , osnova I odpovídá napětí σ_2 .

První způsob konstrukce spočívá ve vytváření úseček přes izokliné čáry. Sklon úsečky odpovídá parametru izokliny. Izostatická čára vzniká jako tečna k úsečkám polygonu [21].

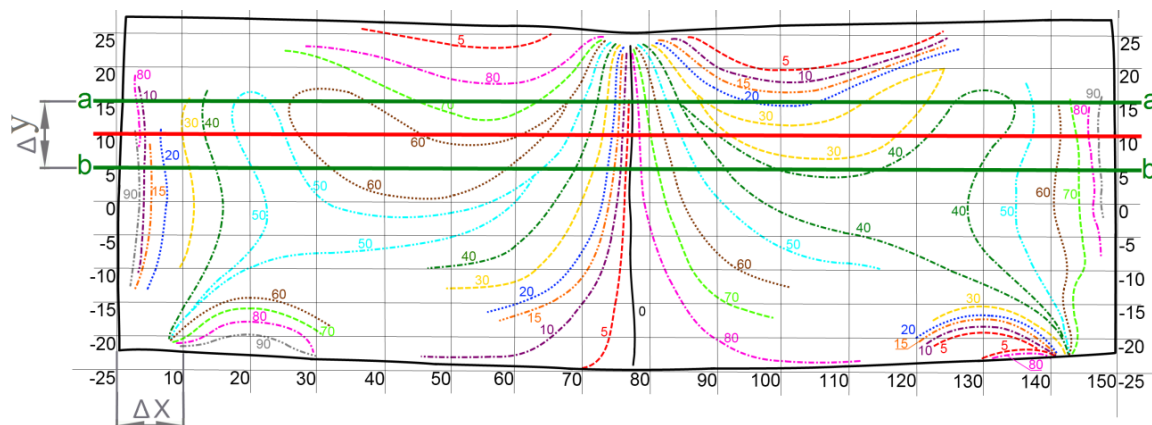
Druhá možnost je vytváření sečnic, jejichž sklon odpovídá průměrné hodnotě parametrů izoklin, mezi kterými sečna leží. Izostata pak prochází všemi průsečíky sečnic s izoklinami [21].

4.1.4 Vyhodnocení metodou rozdílu smykových napětí

Metoda rozdílu smykových napětí využívaná ke zjištění složek napětí a hlavních napětí vede podle našeho zjištění ke správným výsledkům. Na tomto místě se odvolávám na postup, který byl uveden v kapitole 3.3.5. Ukázku provedeme pro hlavní řez $y = 10$ mm vytvořeném na obrazu izochromatických a izoklinných čar (obr. 45 a obr. 46).



obr. 45 Na obrazech izochromat vytvoříme mřížku s vodorovným krokem Δx a svislým krokem Δy . Povedeme hlavní řez ve vzdálenosti $y = 10$ mm.



obr. 46 Totéž provedeme na obrazu izoklinných křivek.

tab. 7 Ukázka aplikace metody rozdílu smykových napětí u TDN. Řez $y = 10 \text{ mm}$.

x	α	α_a	α_b	$(\sigma_x - \sigma_y)$	$(\sigma_x - \sigma_y)_a$	$(\sigma_x - \sigma_y)_b$	τ_{xy} *A
0	0	0	0	1,932	0,966	2,898	0,000
10	30	29	28	3,140	0,966	5,797	1,360
20	50	50	49,375	8,212	6,280	10,386	4,044
30	60	60	57	11,593	9,661	13,043	5,020

Pozn.: Kompletní
verze této tabulky
je uvedena v příloze B
(tab. 11)

$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,b}$	$\Delta\tau_{xy}$ *B	$\Delta\tau_{xy,stř}$ *C	σ_x *D	σ_y *E	σ_1 *F	σ_2 *F	σ_{red} *G _{HMH}
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-1,932	0,000	-1,932	1,932
0,410	2,403	-1,993	-0,997	-0,997	-2,567	-0,212	-3,351	3,251
3,092	5,132	-2,040	-2,017	-3,013	-1,587	1,806	-6,406	7,475
4,183	5,957	-1,774	-1,907	-4,920	0,876	3,775	-7,819	10,242

*A Smykové napětí pro třetí řádek ($i = 3$, $x = 20$):

$$\tau_{xy,3} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_3 \cdot \sin(2\alpha_3) = \frac{1}{2} \cdot 8,212 \cdot \sin(2 \cdot 50) = 4,044 \text{ MPa}. \quad (69)$$

*B Hodnotu $\Delta\tau_{xy,i}$ vypočteme pomocí hodnot z vedlejších řezů:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{xy,i} &= \tau_{xy,a,i} - \tau_{xy,b,i} = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{a,i} \cdot \sin(2\alpha_{a,i}) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{b,i} \cdot \sin(2\alpha_{b,i}). \end{aligned} \quad (70)$$

Pro $x = 20$ ($i = 3$) dostáváme:

$$\Delta\tau_{xy,3} = \frac{1}{2} \cdot 6,280 \cdot \sin(2 \cdot 50) - \frac{1}{2} \cdot 10,386 \cdot \sin(2 \cdot 49,375) = -2,040 \text{ MPa}. \quad (71)$$

Pro $x = 10$ ($i = 2$) dostáváme dle rovnice (70):

$$\Delta\tau_{xy,2} = \frac{1}{2} \cdot 0,966 \cdot \sin(2 \cdot 29) - \frac{1}{2} \cdot 5,797 \cdot \sin(2 \cdot 28) = -1,993 \text{ MPa}. \quad (72)$$

A pro $x = 0$ ($i = 1$):

$$\Delta\tau_{xy,1} = \frac{1}{2} \cdot 0,966 \cdot \sin(2 \cdot 0) - \frac{1}{2} \cdot 2,898 \cdot \sin(2 \cdot 0) = 0 \text{ MPa}. \quad (73)$$

*C Změnu středního smykového napětí vyjádříme:

$$\Delta\tau_{xy,stř,i} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,i} + \Delta\tau_{xy,(i-1)}). \quad (74)$$

Dosažení výsledků z rovnic (71), (72) a (73) do vztahu (74) postupně obdržíme:

$$\Delta\tau_{xy,stř,3} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,3} + \Delta\tau_{xy,2}) = \frac{1}{2}(-2,040 - 1,993) = -2,017 \text{ MPa}, \quad (75)$$

$$\Delta\tau_{xy,stř,2} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,2} + \Delta\tau_{xy,1}) = \frac{1}{2}(-1,993 - 0) = -0,997 \text{ MPa}, \quad (76)$$

$$\Delta\tau_{xy,stř,1} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy,1} + \Delta\tau_{xy,0}) = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0 \text{ MPa}. \quad (77)$$

*^D Hodnota normálového napětí je pak dána vztahem:

$$\sigma_{xi} = \sigma_{x0} \pm \sum_{i=1}^i \Delta\tau_{xy,stř i} \quad (78)$$

Uvážení $\sigma_{x0} = 0$:

$$\sigma_{xi} = \sum_{i=1}^i \Delta\tau_{xy,stř i} \quad (79)$$

Hodnota normálového napětí ve směru osy x (pro $x = 20$):

$$\begin{aligned} \sigma_{x3} &= \sum_{i=1}^3 \Delta\tau_{xy,stř i} = \Delta\tau_{xy,stř 1} + \Delta\tau_{xy,stř 2} + \Delta\tau_{xy,stř 3} = \\ &= 0,000 - 0,997 - 2,017 = -3,013 \text{ MPa.} \end{aligned} \quad (80)$$

*^E Hodnotu normálového napětí ve směru druhé souřadné osy y získáme ze vztahu (32). Dosazením známých hodnot dostáváme:

$$\sigma_{y3} = -3,013 - 8,212 \cdot \cos(2 \cdot 50) = -1,587 \text{ MPa.} \quad (81)$$

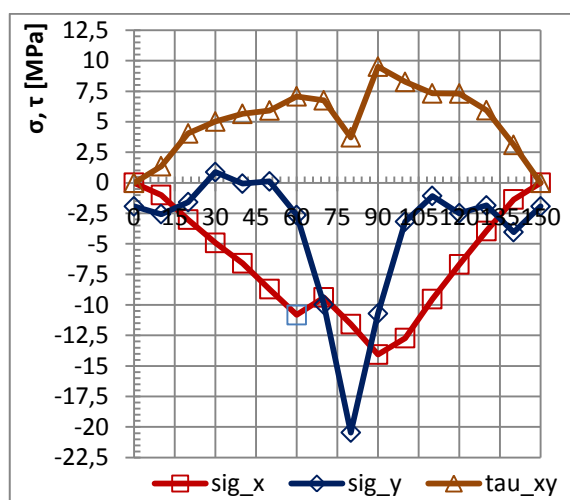
*^F Dopočteme hlavní napětí podle vztahu (33). Velikosti hlavních napětí tedy budou:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{-3,013 - 1,587}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3,013 + 1,587}{2}\right)^2 + (4,044)^2} = 1,806 \text{ MPa,} \\ \sigma_2 &= \frac{-3,013 - 1,587}{2} - \sqrt{\left(\frac{-3,013 + 1,587}{2}\right)^2 + (4,044)^2} = -6,406 \text{ MPa.} \end{aligned} \quad (82)$$

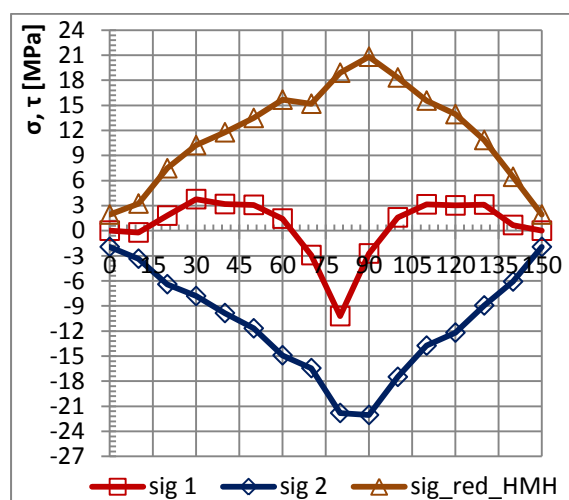
*^G Pomocí rovnice (34) určíme redukované napětí podle hypotézy HMMH:

$$\sigma_{red}^{HMMH} = \sqrt{1,806^2 + (-6,406)^2} = 6,651 \text{ MPa.} \quad (83)$$

Po vyplnění celé tabulky vyneseme získané hodnoty do grafů. Napjatost podél řezu $y = 10 \text{ mm}$ charakterizuje graf 10 a graf 11. Ostatní tabulky a jejich grafická interpretace v podobě diagramů jsou uvedeny v příloze B.



graf 10 Velikosti složek napětí a napětí smykového u trvale deformovaného nosníku podél řezu $y = 10 \text{ mm}$.



graf 11 Velikosti hlavních napětí a redukovaného napětí u trvale deformovaného nosníku podél řezu $y = 10 \text{ mm}$.

4.1.5 Napětí a řády izochromat

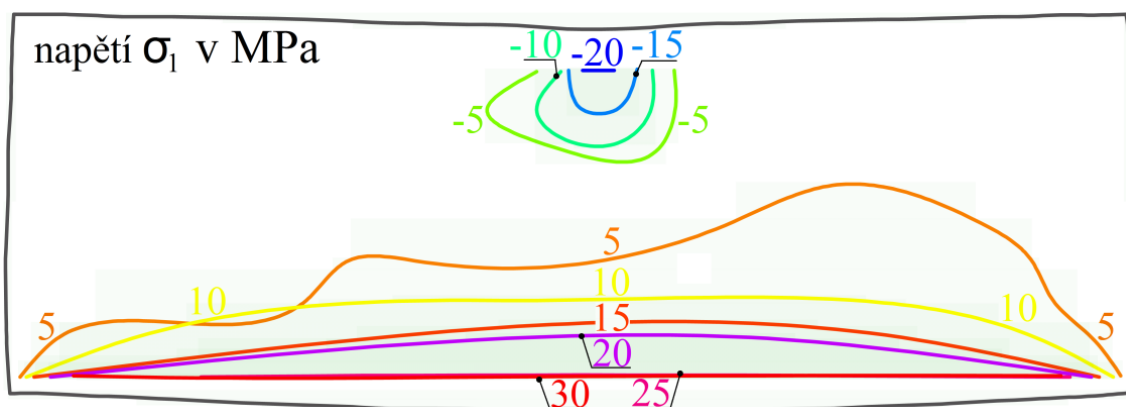
Izochromatickým čarám celých a polovičních řádů odpovídají velikosti rozdílu hlavních napětí. Podle vztahu (22) určíme hodnotu izochromatické čáry řádu 1 ($m = 1$):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_1 = m \cdot \frac{t}{k^c} = 1 \cdot \frac{9}{17,371} = 0,518 \text{ MPa.} \quad (84)$$

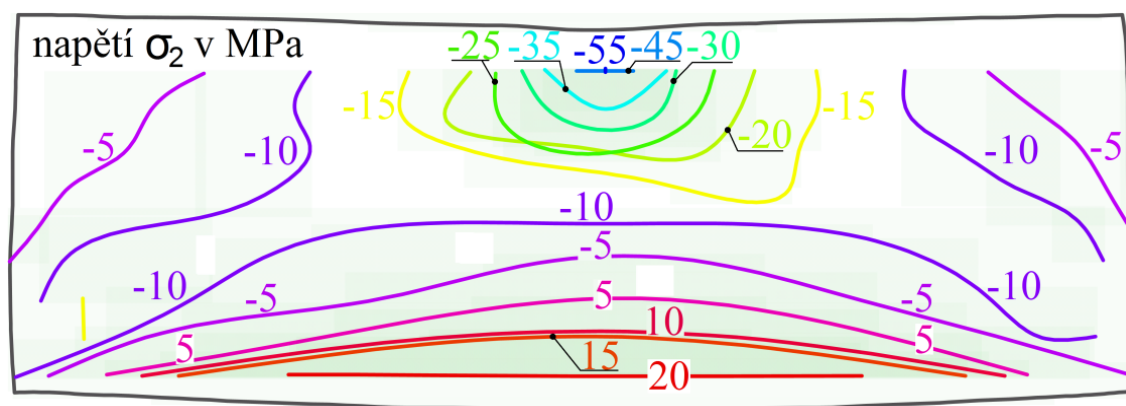
Vztah určuje lineární závislost s proměnnou m (relativním dvojlomem).

4.1.6 Interpretace výsledků

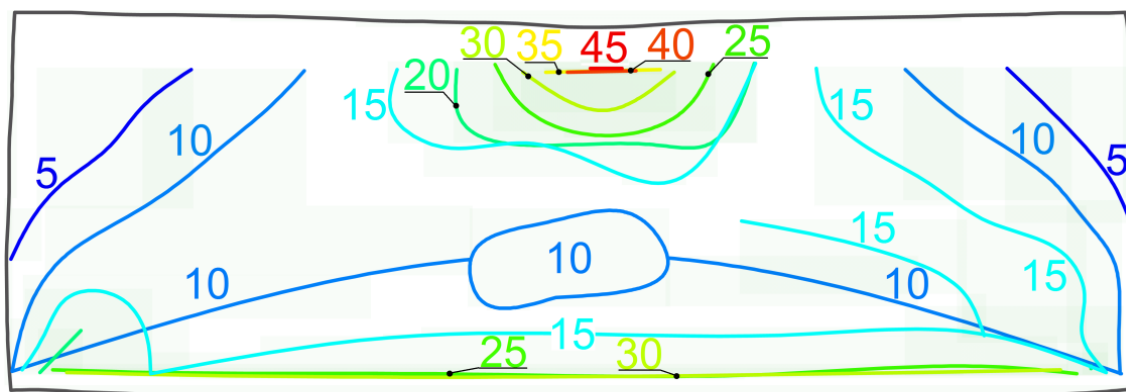
Máme za sebou celou analýzu modelu. Získané výstupy jsou uvedeny v podobě grafů a tabulek v přílohách práce. Nyní je vhodné výsledky zobrazit. Vytvoříme tzv. ekviskalární hladiny obou hlavních napětí (obr. 47 a obr. 48) a napětí redukovaného (obr. 49).



obr. 47 Ekviskalární hladiny napětí σ_1 .



obr. 48 Ekviskalární hladiny napětí σ_2 .



napětí σ_{red}^{HMH} v MPa

obr. 49 Ekviskalární hladiny napětí $|\sigma_{red}|$.

5 ZÁVĚR

V bakalářské práci jsem uvedl několik experimentálních metod vhodných pro vyhodnocení zbytkové napjatosti v plastech. Většinou se jedná o metody destruktivní a semidestruktivní. Metody rentgenové a neutronové difrakce nelze u plastů využít. Velké možnosti skýtá metoda ultrazvuková, kterou lze využít pro velké spektrum konstrukčních materiálů. Její výhodou je zdravotní nezávadnost a velikostně přijatelné technické vybavení. Při práci jsem čerpal z článků publikovaných v odborných časopisech, abych postihl současnou úroveň používaných metod.

Stručnou teorii fotoelasticimetrie jsem uvedl v kapitole 2 včetně schémat dvou sestav polarizačního aparátu, které byly při měřeních využity. Fotoelasticimetrické metody byly v další části textu použity pro analýzu napjatosti v zatíženém vzorku a vzorku trvale deformovaném. V práci jsem uvedl tři postupy, které jsou použitelné pro stanovení konstanty optické citlivosti. Zmíněná konstanta byla metodou stlačovaného disku pro zadaný materiál číselně stanovena v praktické části práce.

V samostatné kapitole jsem na příkladu nosníku zatíženého třibodovým ohybem provedl řešení analytické, numerické a experimentální s cílem ověřit použitelnost zvolené fotoelasticimetrické metody a metody rozdílu smykových napětí. Z výsledků byla patrná dobrá shoda mezi řešením experimentálním a numerickým. Určil jsem průběhy izochromatických a izoklinných čar, což byl základní předpoklad pro další řešení metodou rozdílu smykových napětí. Rovněž jsem stanovil obraz tzv. izostatických křivek, které věrně reprezentují napěťový tok modelem a podél nichž jsou smyková napětí nulová. Zmíněné tři druhy křivek byly v dalším stanoveny i u příkladu nosníku se zbytkovou napjatostí.

Celá kapitola 4 se věnovala vyšetření zbytkové napjatosti trvale deformovaného tělesa. Z počátku bylo zamýšleno vyšetřovat nosník reflexní technikou s využitím kompenzačního měření, ale vzhledem k poměrně hustému obrazu izochromatických čar nebyla metodika použita. Z tohoto důvodu jsme použili transmisní fotoelasticimetrii a aplikovali některou separační techniku, konkrétně metodu rozdílu smykových napětí, za účelem získání jednotlivých složek normálových napětí. Jednalo se o integraci statických rovnic rovnováhy vyjádřených v kartézských souřadnicích za využití rozdílu smykových napětí. Řešení rovnic rovnováhy vyžadovalo využití numerické integrace v bodech vytvořené

mřížky. Zvolená separační technika je náchylná na kumulaci chyb plynoucích ze špatného odečtu řádů izochromatických čar a parametrů čar izoklinných především na okrajích modelu (počátek integrace). Nejprve byl vyšetřen jeden řez na součásti a následně byl postup aplikován na ostatní řezy. Po uskutečnění všech řezů máme vyšetřenou napjatost po celé ploše nosníku. Stejný postup vyhodnocení napjatosti byl zvolen i u zatíženého nosníku.

Z povahy řešeného problému bylo vhodné výsledky respektive celý postup podkládat grafickým znázorněním. Za výsledek analýzy můžeme považovat obr. 47, obr. 48 a obr. 49, ztvárňující ekviskalární hladiny intenzity napětí. Můžeme říci, že algebraicky větší hlavní napětí σ_1 nabývá nejmenší hodnoty cca -28 MPa a největší cca 36 MPa (pozn.: Na obr. 47 nejsou vyjádřeny - vznikají v místech zatížení a podpor). Druhé hlavní napětí σ_2 pak cca -57 MPa a cca 21 MPa. Redukované napětí σ_{red} podle hypotézy HMH má maximální velikost cca 49 MPa. Velmi pohodlné je znázornění redukovaného napětí podle Guesta, kdy každé izochromatické čáře odpovídá jistá hodnota ekvivalentního napětí.

Při zpracování jsem pochopil rozsah experimentálních metod a jejich možnosti v aplikování na problémy pružnosti a pevnosti. Experimentální metody se v současnosti stále rozvíjí a využívají moderní přístroje a výpočetní techniku. Stávají se tak spolu s numerickými metodami silným prostředkem schopným řešit pevnostní problémy v oblastech strojírenské výroby. Poznal jsem, že i metody fotoelasticimetrické zvláště pak metody odrazové fotoelasticimetrie jsou v praxi hojně využívány. Popsat úroveň, použití, podstatu a případně provést aplikaci vybraných experimentálních metod by mohlo být vhodným tématem pro sepsání rozsáhlejší publikace.

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Františku Fojtíkovi, Ph.D. za cenné rady a za pomoc při měřeních.

Dále děkuji rodičům a rodině za podporu při studiu.

6 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] HALAMA, Radim, L. ADÁMKOVÁ, F. FOJTÍK, K. FRYDRÝŠEK, M. ŠOFER, J. ROJÍČEK a M. FUSEK. *Pružnost a pevnost* [online]. 2011, 200 s. [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/pruznost-pevnost>
- [2] VLK, Miloš, Lubomír HOUFEK, Pavel HLAVOŇ, Petr KREJČÍ, Vladimír KOTEK a Jiří KLEMENT. *Experimentální mechanika* [online]. Brno, 2003, 147 s. [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: http://www.umd.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/Experimentalni_mechanika.pdf
- [3] ROSSINI, N.S., M. DASSISTI, K.Y. BENYOUNIS a A.G. OLABI. Methods of measuring residual stresses in components. *Materials* [online]. 2012, vol. 35, s. 572-588 [cit. 2013-05-02]. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.08.022, ISSN 0261-3069. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0261306911005887>
- [4] MASLÁKOVÁ, Kristína, František TREBUŇA, Peter FRANKOVSKÝ a Michal BINDA. Applications of the Strain Gauge for Determination of Residual Stresses using Ring-core Method. *Procedia Engineering* [online]. 2012, vol. 48, s. 396-401 [cit. 2013-05-02]. DOI: 10.1016/j.proeng.2012.09.531, ISSN 1877-7058. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705812045948>
- [5] BATEMAN, M.G., O.H. MILLER, T.J. PALMER, C.E.P. BREEN, E.J. KINGSTON, D.J. SMITH a M.J. PAVIER. Measurement of residual stress in thick section composite laminates using the deep-hole method. *International Journal of Mechanical Sciences* [online]. November 2005, vol. 47, issue 11, s. 1718-1739 [cit. 2013-05-02]. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.06.011, ISSN 0020-7403. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020740305001736>
- [6] IVETIC, G, A LANCIOTTI a C POLESE. Electric strain gauge measurement of residual stress in welded panels. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* [online]. 2009, vol. 44, issue 1, s. 117-126 [cit. 2013-05-03]. DOI: 10.1243/03093247JSA456, ISSN-0309-3247. Dostupné z: <http://sdj.sagepub.com/content/44/1/117.abstract>
- [7] DEWALD, A T a M R HILL. Eigenstrain-based model for prediction of laser peening residual stresses in arbitrary three-dimensional bodies. Part 2: model verification. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* [online]. 2009, vol. 44, issue 1, s. 13-27 [cit. 2013-05-03]. DOI: 10.1243/03093247JSA420, ISSN 0309-3247. Dostupné z: <http://sdj.sagepub.com/content/44/1/13.abstract>

- [8] HETÉNYI, M. *Handbook Of Experimental Stress Analysis*. 5. vyd. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.
- [9] SHOKRIEH, M.M., S. AKBARI a A. DANESHVAR. A comparison between the slitting method and the classical lamination theory in determination of macro-residual stresses in laminated composites. *Composite Structures* [online]. February 2013, vol. 96, s. 708-715 [cit. 2013-05-04]. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.10.001, ISSN 0263-8223. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S026382231200476X>
- [10] KARABUTOV, Alexander, Anton DEVICHENSKY, Alexander IVOCHKIN, Michael LYAMSHEV, Ivan PELIVANOV, Upendra ROHADGI, Vladimir SOLOMATIN a Manomohan SUBUDHI. Laser ultrasonic diagnostics of residual stress. *Ultrasonics* [online]. November 2008, vol. 48, 6-7, s. 631-635 [cit. 2013-05-04]. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.07.006, ISSN 0041-624x. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0041624X08001169>
- [11] BELAHCENE, F a J LU. Determination of residual stress using critically refracted longitudinal waves and immersion mode. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* [online]. January 2002, vol. 37, issue 1, s. 13-20 [cit. 2013-05-04]. DOI: 10.1243/0309324021514790, ISSN 0309-3247. Dostupné z: <http://sdj.sagepub.com/content/37/1/13.abstract>
- [12] OLYMPUS. *Manually Controlled Pulser- Receivers* [online]. Printed in the USA, 2009 [cit. 2013-05-05]. Dostupné z: <http://www.olympus-ims.com/en/5072pr/>
- [13] ALBERTAZZI JR., Armando G., Matias R. VIOTTI a Walter A. KAPP. A Robust Achromatic DSPI Interferometer for Measurement in Polar Coordinates. *Tm - Technisches Messen* [online]. November 2011, vol. 78, issue 11, s. 513-519 [cit. 2013-05-05]. DOI: 10.1524/teme.2011.0206, ISSN 0171-8096. Dostupné z: <http://www.oldenbourg-link.com/doi/abs/10.1524/teme.2011.0206>
- [14] STRESSTECH GROUP. *Residual stress measurement based on hole-drilling and ESPI*. [online]. [cit. 2013-04-08]. Dostupné z: http://www.innogrind.nl/hd1000c_Prism.pdf
- [15] WENG, Can, W.B. LEE a S. TO. Birefringence techniques for the characterization of residual stresses in injection-moulded micro-lens arrays. *Polymer Testing* [online]. October 2009, vol. 28, issue 7, s. 709-714 [cit. 2013-05-05].

DOI: 10.1016/j.polymertesting.2009.06.007, ISSN 0142-9418. Dostupné z:
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142941809001007>

- [16] MACURA, Pavel. Experimentální metody v pružnosti a plasticitě. Ostrava: VŠB-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2001, 107 s. ISBN 80-7078-934-4.
- [17] VISHAY PRECISION GROUP. *Introduction to the PhotoStress® Method* [online]. 2011 [cit. 2013-05-08]. Dostupné z: <http://www.vishaypg.com/micro-measurements/photo-stress-plus/category/tech-notes/?subCategory=tech-notes>
- [18] HALLIDAY, David, RESNICK a WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Brno: VUTIUM, 2000. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 80-214-1869-9. Pozn.: kapitola 34
- [19] MILBAUER, Miloš. *Fotoelasticimetrie a její použití v praxi*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1953, 140 s.
- [20] ASTM D4093-95. *Standard Test Method for Photoelastic Measurements of Birefringence...* West Conshohocken: ASTM International, ©2012, 11 s.
- [21] TREBUŇA, František a František ŠIMČÁK. *Príručka experimentálnej mechaniky*. Košice: TopoPress, vydavateľstvo a tlačiareň, 2007, 1 526 s. Vedeckej a odbornej literatúry. ISBN 970-80-8073-816-7.
- [22] MILBAUER, Miloš a Miroslav PERLA. *Fotoelasticimetrické přístroje a měřicí metody*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959, 471 s. Sekce technická.
- [23] BEDNÁŘ, Jozef, Vladimír KOLÁŘ, Ladislav MEJZLÍK, Rudolf PLECHATA a Jaroslav ŠLECHTA. *Experimentální pružnost*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1970, 269 s. DT 539.31.
- [24] FERNÁNDEZ, M Solaguren-Beascoa, J M Alegre CALDERÓN, P M Bravo DÍEZ a I I Cuesta SEGURA. Stress-separation techniques in photoelasticity: A review. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* [online]. 2010-1-1, vol. 45, issue 1, s. 1-17 [cit. 2013-05-11]. DOI: 10.1243/03093247JSA583, ISSN 0309-3247. Dostupné z: <http://sdj.sagepub.com/content/45/1/1.abstract>
- [25] TREBUŇA. *Princípy, postupy, přístroje v metode photostress*. Košice: Strojnícka fakulta TU v Košiciach, 2006, 360 s. Edícia vedeckej a odbornej literatúry. ISBN 80-8073-670-7.

- [26] EL-SHAMY, A. Eman. Photoelastic analysis of Discontinuous Infilled Frame at Loss of Soil Support. *Life Science Journal* [online]. 2013, vol. 10, issue 1, s. 1766-1778 [cit. 2013-05-11]. ISSN 1097-8135. Dostupné z: <http://www.lifesciencesite.com/ljsj/life1001/>
- [27] LENERT, Jiří. *Pružnost a Pevnost I.* 3. vydání. Ostrava: VŠB-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2009, 142 s. ISBN 978-80-248-2111-5.
- [28] MSC SOFTWARE CORPORATION. *MSC Software Solutions: Expanding the Horizon of Engineering Simulation* [online]. [2013] [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: http://www.mscsoftware.com/sites/default/files/br_company_overview_ltr_w.pdf
- [29] MACURA, P. a F. FOJTÍK. Experimentální a analytické řešení tenzorového napětíového pole vetknutého nosníku. *Jemná mechanika a optika*. 2012, roč. 57, č. 04, s. 100-105. ISSN 0447-6441. Dostupné z: <http://jmo.fzu.cz/>
- [30] Processing Techniques. SOLVAY PLASTICS. SOLVAY Plastics [online]. 2013 [cit. 2013-04-30]. Dostupné z: <http://www.solvayplastics.com/sites/solvayplastics/EN/vinyls/processing/Pages/vinyls-processing.aspx>

7 SEZNAM PŘÍLOH

- Příloha **A** — Tabulka výsledků obdržená metodou rozdílů smykových napětí provedenou v jediném řezu ($y = 10 \text{ mm}$) pro případ zatíženého nosníku. Grafické srovnání s řešením analytickým a numerickým.
- Příloha **B** — Tabulka výsledků obdržená metodou rozdílů smykových napětí provedenou ve všech řezech pro případ nosníku se zbytkovými napětími. Grafické vyobrazení průběhů napětí.